El Potencial Educativo de Programas Gráficos

GRAPES

Abraham Arcavi

INTRODUCTION

La disponibilidad de programas de fácil uso para graficar funciones y relaciones remarca el rol de las representaciones gráficas. Es posible que las actividades tradicionales de sustituir y calcular valores a partir de expresiones simbólicas con el objeto de trazar sus gráficas en un plano cartesiano tenga valor educativo. Sin embargo, en el caso de muchas expresiones, estos procedimientos “manuales” suelen ser trabajosos y consumen mucho tiempo, convirtiéndolos en poco utilizables para propósitos educativos. En cambio, la obtención inmediata de un gráfico de una función o una relación abre nuevas oportunidades para nuevas actividades y cuestiones a aprender. Por ejemplo:

- Los estudiantes podrían modelar problemas y estudiar sus representaciones gráficas, aun cuando sus expresiones simbólicas sean muy complicadas.

- Tradicionalmente, el gráfico fue el punto final de muchos problemas matemáticos: sobre la base de un expresión simbólica dada y por medio de herramientas analíticas (como por ejemplo, la derivada de una función) se requiere deducir las características principales de su gráfico y proceder a esbozarlo. Estos bosquejos pueden ser fácilmente verificados con un programa gráfico, pero la posibilidad de obtenerlo instantáneamente abren un interrogante sobre la mera existencia de esos problemas. En cambio, un programa gráfico puede ser usado para “invertir” esos problemas, es decir, dado un gráfico ¿podemos encontrar la expresión simbólica que lo generó? Podemos proponer conjeturas acerca de la expresión correspondiente a un gráfico dado, y servirnos del programa para verificar nuestra conjetura. Si esta conjetura resulta errónea o aproximada, podemos usar el programa para revisar, ajustar y refinar nuestras propuestas Haza que tengamos éxito. Este proceso dirige la atención hacia el papel de los coeficientes en una expresión simbólica y proporciona una idea de cómo estos influyen en la forma del gráfico. Al principio, esta idea puede ser sólo fenomenológica, pero luego puede ser estudiada analíticamente.

- Programas gráficos pueden facilitar la visualización de familias de funciones o relaciones, tornando más transparente el papel de los parámetros.

- El trabajo con gráficos pone de manifiesto la cuestión de la escala, por ejemplo, llamando la atención al hecho de que las partes del gráfico observables en pantalla dependen del dominio visible de los ejes, el cual uno es libre de elegir. A veces, pensamos que un gráfico es lineal sólo porque la escala estipulada en los ejes lo hace aparecer así. Otras veces, uno se sorprende de que el programa no produce ningún gráfico, para luego caer en la cuenta de que éste cae fuera de la escala seleccionada. Y como estos muchos otros casos.

- Un programa gráfico puede producir resultados inesperados, que nos obligan a embarcarnos en entenderlos, usando todo el conocimiento a nuestra disposición. A veces, resultados sorprendentes obedecen a cuestiones matemáticas de las que no somos conscientes de primera impresión, en otras ocasiones, son el resultado de una entrada errónea de una expresión simbólica, y aún en otras ocasiones se deben a las limitaciones de la tecnología. En cualquiera de esos casos, desentrañar las razones de nuestra sorpresa tiene un alto potencial de aprendizaje, ya que se requieren explicaciones basadas en examinar y coordinar entre representaciones y conectar diferentes tipos de conocimiento.

- Gráficos pueden servir como la base para la resolución de problemas, tradicionalmente resueltos por otros medios. Se puede operar con gráficos (por ejemplo, sumarlos, restarlos), gráficos pueden ser objeto de una traslación o una rotación. Gráficos pueden inspirar revelaciones sobre las expresiones simbólicas. En suma, un programa gráfico puede ser el fundamento sobre el cual se desarrollen nuevas formas de razonamiento matemático, que puedan ayudar a muchos estudiantes a aprender de maneras diferentes.

Estas breves descripciones incluyen algunas de las posibilidades educativas de un programa gráfico. A continuación, presentamos ejemplos de problemas, acompañados de comentarios breves, para ilustrar los puntos descriptos. Tres de los problemas que presentamos han sido discutidos en entrevistas con dos maestros japoneses, uno de ellos un usuario experimentado en el uso de entornos computarizados en educación (y que además comentó por escrito casi todos los otros problemas), y el otro, un maestro con experiencia pero que no había usado tecnología anteriormente. Incluimos más adelante el informe sobre sus experiencias y opiniones durante las entrevistas.

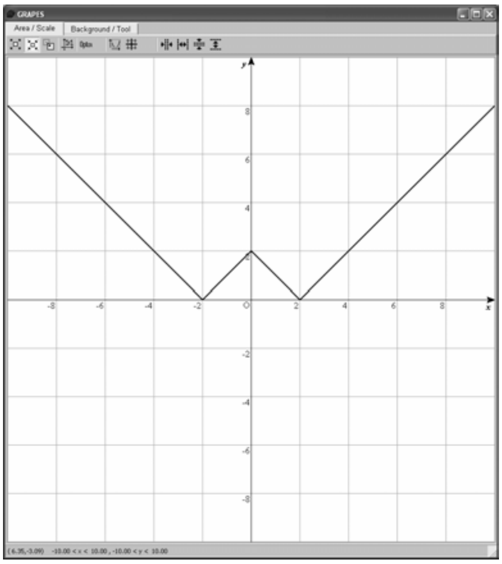
Nótese que cada uno de los problemas es presentado fuera del contexto de una secuencia curricular. La forma de abordar estos problemas depende mucho de su ubicación en una secuencia de aprendizaje, y de los conocimientos y experiencias previas de quién los resuelva. No obstante, como los problemas ejemplifican los usos posibles de la tecnología, pueden ser presentados tal cual (dentro o fuera de contexto), o pueden ser adaptados a lecciones o currículos diferentes. Los problemas pueden también servir como ejemplos a maestros o diseñadores de materiales curriculares para inspirar crear sus propios problemas o proyectos de exploración.

Los problemas que presentamos fueron creados con y para GRAPES, un programa gráfico desarrollado en CRICED (Centro de Investigación en Cooperación Internacional para el Desarrollo Educativo, Universidad de Tsukuba, Japón). Los problemas hacen uso de una pequeña parte de las opciones ofrecidas por el programa, y pueden ser abordados con otros programas gráficos.

Hacia el final de este informe, incluimos una breve bibliografía comentada donde se pueden encontrar análisis más detallados, discusiones y ejemplos del potencial educativo de los programas gráficos, incluyendo resultados de investigación sobre su uso con alumnos.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS

1- Reproduzca en su pantalla en gráfico siguiente:



Comentario

Para reproducir el gráfico, uno debe diseñar una expresión simbólica, ingresarla y revisar si se ha obtenido le resultado deseado.

Un posible abordaje consiste en dividir el dominio del gráfico en cuatro sub-dominios y establecer una expresión simbólica para cada uno de ellos, en este caso, se trata de cuatro funciones lineales. De esta manera, las siguientes expresiones producirán el gráfico deseado: $y = x-2$ $(x>2)$; $y = -x+2$ $(0<x<2)$; $y = x+2$ $(-2<x<0)$; $y = -x-2$ $(x<-2)$.

Otro abordaje posible sería subdividir el dominio en sólo dos sub-dominios y usar la función valor absoluto: $y = |x-2|$ $(x>0)$; $y = |x+2|$ $(x<0)$.

Aún otro abordaje posible sería producir una sola expresión para todo el dominio:

$y = ||x|-2|$.

El uso de la función valor absoluto puede atraer la atención de los alumnos hacia la relación entre la aplicación del valor absoluto a una expresión simbólica cualquiera y su efecto en el gráfico.

Asimismo, problemas de este tipo pueden promover en los alumnos investigaciones independientes, en las cuales experimentando con el valor absoluto puedan obtener por su propia cuenta gráficos interesantes, y desafiarse unos a otros en encontrar las expresiones simbólicas correspondientes.

2- Produzca paralelogramos diferentes por medio de ecuaciones de líneas que se cortan, tal que sus vértices estén (0,0), (2,2) y (4,0). ¿Cuántos paralelogramos puede encontrar?

Comentario

Este problema requiere visualizar el cuarto vértice de un paralelogramo cuando los otros tres son dados, producir las ecuaciones lineales de sus lados (en base a dos vértices) y comprobar que el resultado gráfico es efectivamente el paralelogramo deseado. Nótese que existen tres paralelogramos (con el cuarto vértice en (6,2), (2,-2) o (-2,2)), y es posible analizar el hecho de que no existen otros.

3- ¿Qué tienen en común los gráficos de las funciones de la familia $y = ax + a$? Explique su resultado simbólica y gráficamente.

Comentario

Hay varias maneras de abordar este problema. Una posibilidad es usar el programa gráfico para trazar varios gráficos (para valores distintos de *a*) y observar la propiedad común a todas ellas: todas las líneas se cortan en el punto (-1,0).

Otra posibilidad es comenzar analíticamente, transformando $y = ax + a \Rightarrow y = a(x+1)$, y observando que, para cualquier valor del parámetro *a*, cuando $x = -1$, $y = 0$. En este caso, el programa gráfico puede servir para visualizar el resultado analítico.

Aún otro abordaje posible sería a partir de los significados gráficos de los conceptos de pendiente e intersección con el eje *y* (en este caso, ambos están representados por *a*). Suponiendo que $a>0$, como representa al intersección con el eje *y*, podemos señalar genéricamente el segmento de extremos (0,0) y (0,*a*) en la parte superior del eje *y*. Como la pendiente también está representada por *a*, y la pendiente en forma gráfica es el segmento diferencia entre las coordenadas *y* dividido por el segmento diferencia entre las coordenadas *x*, éste último debe ser 1. Dibujando el ejemplo genérico, nos lleva a la conclusión que todas las líneas de esta familia con $a>0$ deben pasar por (-1,0). El mismo argumento se puede hacer para $a<0$ (obviamente es válido para $a=0$).

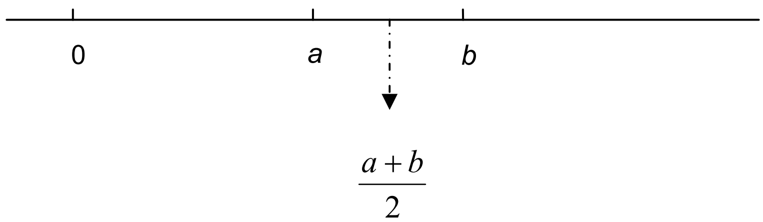
4- El promedio de dos números *a* y *b* es calculado por la fórmula $\frac{a+b}{2}$. Considérese $a>0$ y $b>0$, y obsérvese que a veces el promedio es el mismo valor que (el valor positivo de) su diferencia (por ejemplo, el promedio de 10 y 30 es 20, y 30-20=10, pero el promedio de 10 y 16 es 13, pero 16-13≠3). Explore con Grapes (o por otros medios), para cuales pares de números, su promedio es el mismo que su diferencia (positiva).

Comentario

Tradicionalmente, este problema puede ser abordado analíticamente, estableciendo la ecuación $\frac{a+b}{2} = a - b$, (suponiendo $a>b$) y resolviendo para obtener la simple relación $a = 3b$. Es decir, cuando el número mayor sea tres veces el menor, su promedio y sus diferencia serán iguales. Este problema también puede ser resuelto requiriendo que el programa trace la gráfica de la relación $\frac{a+b}{2} = a - b$. El gráfico es una línea, y la relación entre los dos números debe ser leída a partir de allí.

La combinación de estos dos abordajes puede ser una buena manera de comparar y contrastar representaciones..

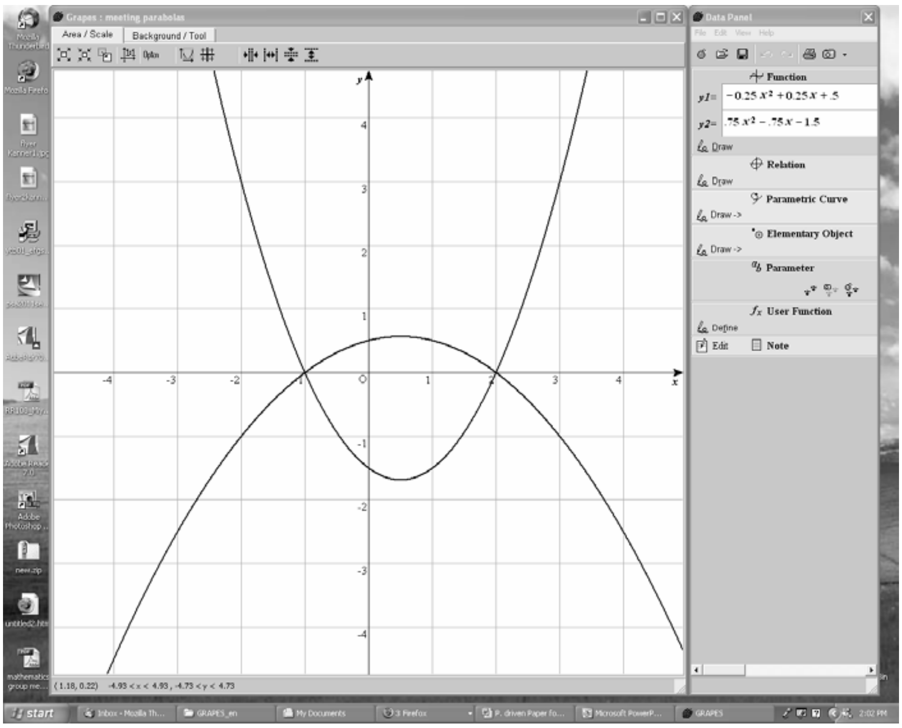
Se puede decir que ambos abordajes producen la respuesta, pero no transmiten una explicación intuitiva del por qué eso ocurre. Puede ser que una tercera solución, que hace uso de la línea numérica le hable a nuestra intuición. Considérese el siguiente diagrama:



La solución del problema requiere que la longitud del segmento $\overline{ab}$ sea igual a la longitud del segmento cuyos extremos son 0 y $\frac{a+b}{2}$. Estos dos segmentos ya tienen una parte en común (el segmento entre *a* y $\frac{a+b}{2}$), por lo tanto las dos partes restantes en ambos deberán ser iguales, es decir, el segmentó entre 0 y *a* debe tener la misma longitud que el segmento entre $\frac{a+b}{2}$ y *b*. Si esto es así, el segmento entre 0 y *b* ha sido subdividido en tres partes iguales, o que implica que *b* es el triple de *a*.

Otros problemas similares pueden ser propuestos e investigados, por ejemplo, hallar cuándo el promedio de dos números es igual a su suma, su producto o su cociente. Los dos casos últimos producen gráficos interesantes cuya interpretación puede llevar a ricas discusiones de clase (por ejemplo, el significado de las asíntotas, etc.).

5- Reproduzca con Grapes la siguiente pantalla



Comentario

Este problema requiere hallar los parámetros de las dos funciones cuadráticas para poder obtener sus gráficos. Esta actividad dirige la atención hacia el hecho de que dos puntos no determinan una única parábola. Las diferentes formas de solución están detalladas en las entrevistas del informe adjunto (más abajo).

13- Use Grapes para graficar $x^2y + y^3 - x^2 - y^2 = 0$. Explique sus resultados.

Comentario
Este problema fue deliberadamente diseñando para producir una sorpresa. El gráfico visible que se obtiene es una línea correspondiente a *y=1*, contrariamente a nuestras expectativas, y en marcado contraste con *y=ax+b*, la expresión simbólica prototípica de una función lineal. Todo resultado inesperado o sorpresivo puede dar origen a una investigación y ser una fuente de aprendizaje. En este caso, uno puede, por ejemplo, recurrir a la técnica algebraica para factorizar $x^2y + y^3 - x^2 - y^2 = 0$, y obtener $(x^2 + y^2)(y-1) = 0$, y a partir de ello deducir que el gráfico tiene dos partes, una de las cuales corresponde a línea que se ve en pantalla, y la otra corresponde al punto (0,0). O sea, que el gráfico de la expresión dada incluye un punto y una línea. ¿Cuál sería el potencial educativo de este tipo de problema? Primeramente, lo estudiantes pueden caer en la cuenta (si no lo sabían de antes) de que es posible construir una sola expresión simbólica para dos entidades "separadas", una línea y un punto. Segundo, el conocimiento algebraico necesario para transformar una expresión en otra sirvió de base para encontrar una explicación a un resultado gráfico inesperado. Tercero, uno nota que el programa no siempre despliega toda la información gráfica, ya que el punto (0,0) no aparece en pantalla (en Grapes es posible hacer cambios de escala para visualizar el punto). La solución de este problema puede implicar una "advertencia": obsérvese siempre con ojo crítico el gráfico resultante de un programa computarizado.
Véase el informe adjunto de las entrevistas con los maestros para más comentarios sobre este problema.

14- Use Grapes para graficar $x^2y + y^3 - 6x^2 - 6y^2 = 0$. Explique sus resultados.

15- Use Grapes para graficar $y = x - 9.95$. Describa sus resultados.

16- Use Grapes para graficar $x^2 + y^2 = 48.5$. Describa sus resultados.

Comentario
Estos problemas son complementarios de los anteriores, en los cuales el resultado gráfico es sorprendente. Si uno no cambia las escalas pre-fijadas automáticamente por el programa (de -5 a 5 in ambos ejes), el gráfico no aparecerá en pantalla (problema 7) o sólo pequeñas porciones de él se verán en los rincones de la misma. Estos problemas están destinados a llamar la atención a las cuestiones relacionadas con la escala de los gráficos y al hecho de que es el usuario quién determina las porciones del gráfico que se quiere ver aparecer en pantalla. Se les puede presentar a los estudiantes el problema "inverso", es decir, seleccionar, de varias maneras diferentes, las escalas para que un cierto gráfico no aparezca del todo en pantalla.

17- Produzca funciones cuadráticas (en la forma $y = ax^2 + bx + c$) tales que sus gráficos pasen por (0,0). (Confirme usando Grapes).

Comentario

El objetivo de este problema es explorar las distintas posibilidades de los parámetros que producirían gráficos que pasen por (0,0), y resumir las conclusiones. Para $a \neq 0$, los casos a considerar para describir gráficamente y sacar conclusiones de ellos son

$b = 0$ y $c = 0$, $b \neq 0$ y $c = 0$, $b = 0$ y $c \neq 0$, y $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

Este problema también presenta la oportunidad de coordinar entre representaciones, considerando, por ejemplo, las raíces de una ecuación cuadrática tanto gráfica como simbólicamente. Este problema puede también resolverse tomando como punto de partida las otra expresiones generales de una función cuadrática.

18- Explore con Grapes (de dos manera diferentes) el siguiente problema: De todos los rectángulos de perímetro 4, ¿cuál de ellos tiene el área máxima?

Comentario

Una manera de resolver este problema es escribir una expresión simbólica para la función del área, es decir, $y = x(2-x)$, trazar su gráfico y encontrar e interpretar (geométricamente) su valor máximo.

Otra manera posible, es graficar la relación $xy = 1$, en la cual cada punto del gráfico (cuando *x*>0) puede representar un rectángulo de área 1. El gráfico de la relación $x + y = 2$, en el intervalo abierto (0,2) representa todos los rectángulos de perímetro 4. La posición relativa de los dos gráficos puede ser interpretada así: todos los rectángulos de perímetro 4, excepto aquél para el cual *x* = *y* = 1 tienen área menor que 1.

También se puede producir una demostración geométrica que no hace uso del programa gráfico de este tipo.

19- Use Grapes para encontrar el conjunto de valores que resuelven $\lvert x-2 \rvert > \lvert 2x-1 \rvert$. - Halle otras formas de resolver, y considere sus ventajas y desventajas. - Halle el valor de *x* para el cual la diferencia es máxima. Explique su solución.

Comentario

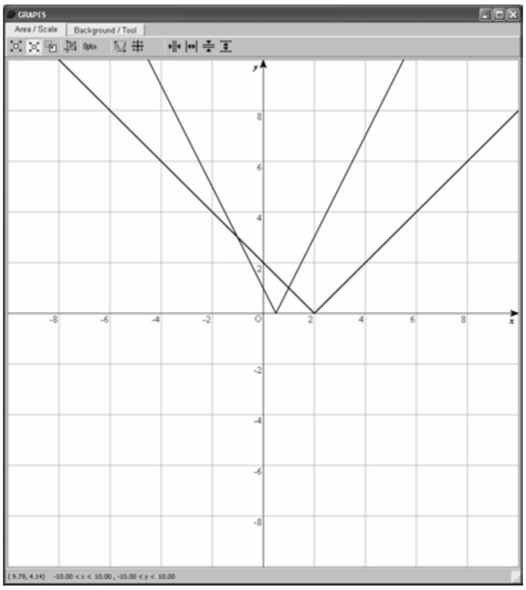
En la mayoría de los textos de álgebra tradicional en los cuales se proponen este tipo de problemas, el proceso de solución considera cada uno de los posibles casos, es decir,

- $x-2>0$ y $2x-1>0$
- $x-2<0$ y $2x-1>0$
- $x-2>0$ y $2x-1<0$
- $x-2<0$ y $2x-1<0$

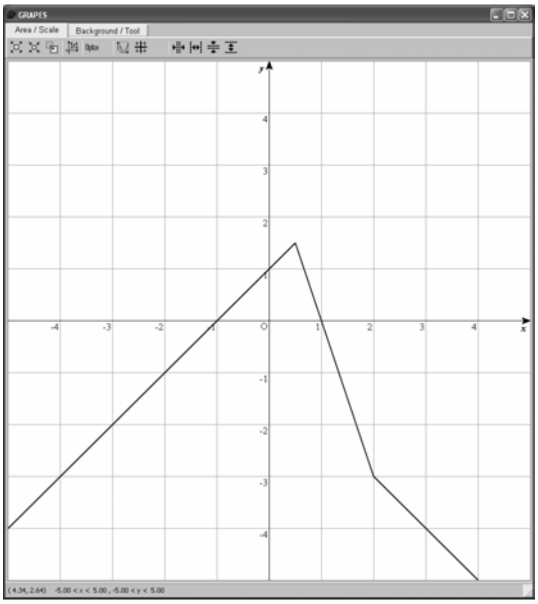
Para cada uno de estos casos, la ecuación se resuelve quitando el valor absoluto, y tomando cuidado de revertir los signos positivos y negativos cuando es necesario.

El proceso involucra el uso de varios conectivos lógicos, es largo y propenso a error.

Una manera de usar el programa gráfico sería considerar a cada lado de esta inecuación como la expresión simbólica de una función, requerir su gráfico y comparar los dominios para los cuales los valores de la primera función son mayores que los valores de la segunda. Esto puede leerse fácilmente de los gráficos.



Los gráficos pueden darnos una respuesta a la segunda pregunta, buscando la distancia mayor entre ellos dentro del dominio requerido. Sin embargo, hay una segunda manera de abordar la pregunta. Se puede requerir el gráfico de la diferencia entre las dos funciones, es decir, $y = |x-2| - |2x-1|$, y ubicar su valor máximo, tal cual lo muestra el gráfico siguiente..



Además de la ubicación del valor máximo, es interesante discutir las otras características de este gráfico.

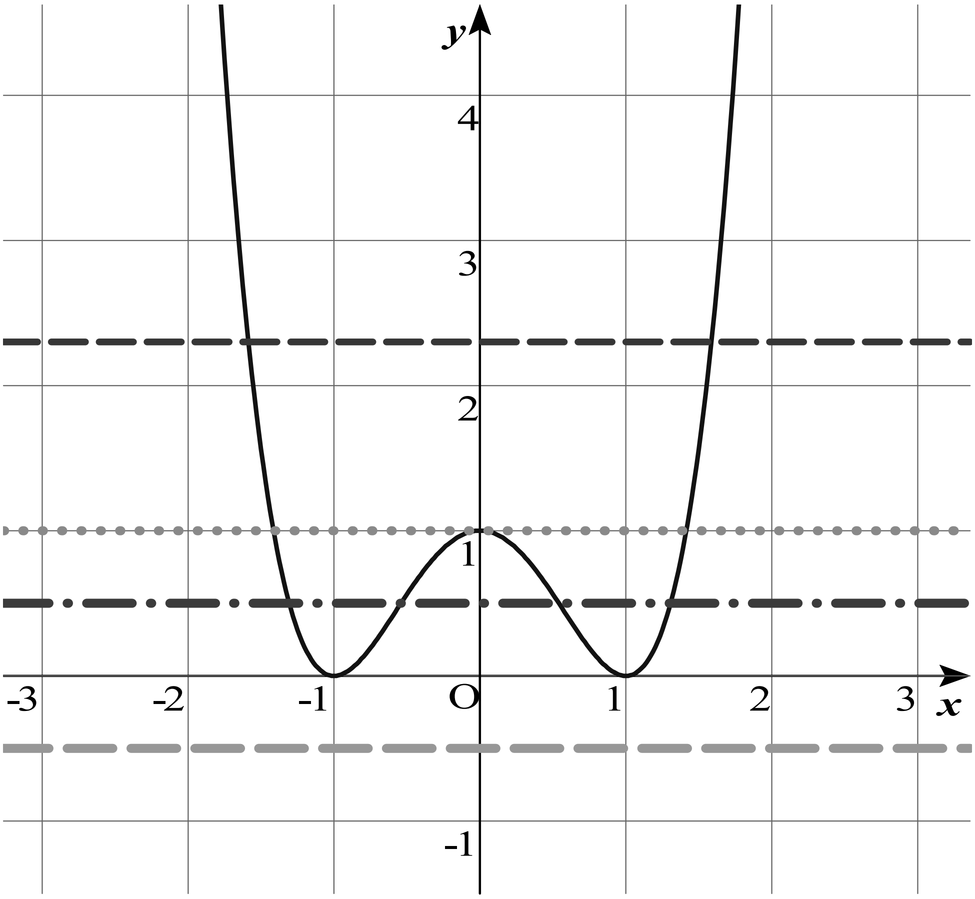
13- Trace el gráfico de la función $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Trace una línea recta, tal que:

a) no se corte con el gráfico de *y*;
b) tiene exactamente dos puntos de intersección con el gráfico de *y*;
c) tiene exactamente tres puntos de intersección con el gráfico de *y*;
d) tiene exactamente cuatro puntos de intersección con el gráfico de *y*;
e) tiene sólo un punto de intersección con el gráfico de *y*;

¿Cómo propondría comprobar las respuestas?.

Comentario

Una respuesta inmediata a los primeros cuatro puntos, a)-d), es trazar gráficos de funciones lineales de la forma *y* = *a* (es decir, líneas horizontales) ubicadas apropiadamente, por ejemplo, *y* = -0.5, *y* = 2.3, *y* = 1 e *y* = 0.5, respectivamente, como lo muestra la figura siguiente.



En realidad, muchos alumnos interpretan líneas "rectas" como líneas horizontales o verticales solamente. El punto e) no se puede resolver con una línea horizontal, (esto se puede visualizar en el gráfico y demostrar analíticamente).

Para encontrar una línea con un sólo punto de intersección con el gráfico de la función dada, una posibilidad sería proceder a encontrar analíticamente la ecuación de la tangente al gráfico en un punto pre-seleccionado, de tal manera que la tangente no se corte con el gráfico en otro punto. Por ejemplo, si elegimos el punto (2,9), la ecuación de la tangente es *y* = 24*x* - 39.

Se podría buscar funciones lineales cuyos gráficos no son horizontales para las cuatro preguntas anteriores, y el programa proveería información inmediata para comprobar nuestros resultados. Muchas veces esa información visual debe ser cuidadosamente constatada.

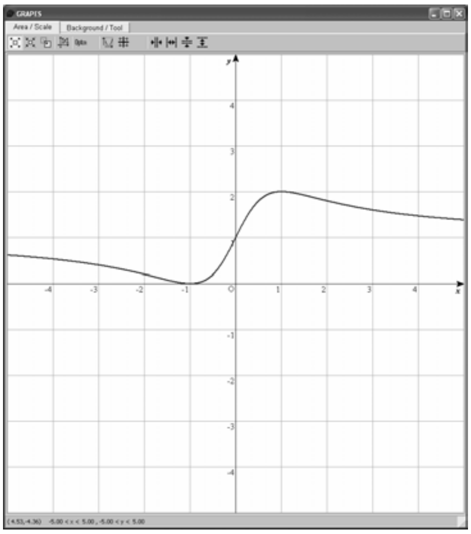
Como la expresión simbólica de la función dada es un polinomio de cuarto grado, comprobaciones analíticas implicarían resolver ecuaciones muy complicadas)aún cuando en este caso la expresión puede ser reducida a su forma más simple $y=(x^2-1)^2$). La comprobación en el gráfico puede proveernos de información útil (si bien no siempre exacta). Considérese, por ejemplo, comprobar cuantos puntos de intersección tiene el gráfico con la línea de ecuación $y = x - 1.05$. A veces usar la opción de magnificación puede ser útil. Estas situaciones pueden servir para discutir el rigor (o su ausencia) de las representaciones gráficas, sin menospreciar su valor intuitivo y heurístico para la visualización global y el sentido común.

14- Trace el gráfico de la función $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$. Use sus conocimientos de álgebra para explicar tantas características del gráfico como pueda.

Comentario

Preguntas de este tipo promueven la verbalización de las múltiples conexiones entre las representaciones gráficas y simbólicas de funciones. Actividades de este tipo desarrollan el hábito de explicar a-posteriori las características gráficas usando argumentos que emergen de las expresión simbólica y viceversa.

El gráfico de esta función es el siguiente.



Las siguientes son algunas de las conexiones que uno puede ayudar a que los alumnos noten:

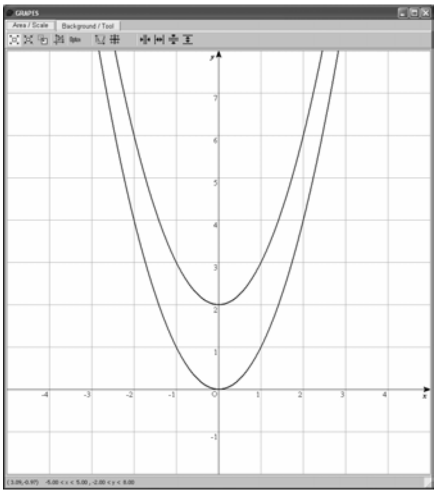
- Aparentemente, el gráfico está en su totalidad por encima del eje *x*. Así debe ser, pues salvo para $x = -1$, la expresión es siempre positiva, ya que tanto su numerador (que de hecho es $y=(x+1)^2$) como su denominador son positivos.
- Las intersecciones con los ejes pueden ser fácilmente calculadas, y se puede demostrar que no hay otras que las que muestra la pantalla.
- ¿Será $y = 1$ una asíntota, como lo parece sugerir el gráfico? Un rápido análisis cualitativo de la expresión confirma que para valores absolutos grandes *x*, los valores de $(x+1)^2$ y x^2+1 se tornan muy próximos, y así su cociente tiende a 1.

- En el gráfico pareciera que hay un segmento muy próximo a una línea recta. Si inspeccionamos la expresión, para valores pequeños de *x*, x^2 es insignificante, y así el gráfico es casi coincidente con el gráfico de *y* = 2*x* +1.

15- Dadas $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 + 2$, prediga la forma de los gráficos de las funciones $y_2 - y_1$ y y_2 / y_1. Compruebe su predicción usando Grapes y explique sus resultados.

Comentario

A partir de las expresiones algebraicas, es claro que la diferencia $y_2 - y_1$ es constante. Lo que puede ser de importancia educativa en este caso, es que resultados analíticos que son obvios y que pueden dejar mucho que aprender en su forma gráfica. Si trazamos los gráficos de y_2 y y_1, una ilusión óptica nos puede llevar a creer que la distancia vertical entre ambos (es decir, su diferencia) disminuye. Véase el siguiente gráfico.



En este ejemplo, la importancia de las conexiones entre representaciones reside precisamente en disipar ilusiones ópticas engañosas.

El cociente entre las funciones y el análisis de su gráfico lleva a una discusión similar a la del problema 14.

Entrevista con dos profesores de matemáticas
trabajando problemas con Grapes
Breve Informe

Una entrevista de una hora y media de duración con dos experimentados profesores de matemáticas (ambos estudiantes de Maestría en Educación Matemática en la Universidad de Tsukuba, Japón) fue conducida por Takeshi Miyakawa, Masami Isoda y Abraham Arcavi, el 15 de Mayo de 2005 (8:30-10:00a.m.).

El objetivo de la entrevista fue recoger impresiones acerca de:

c) las maneras en que los maestros hacen uso de Grapes para resolver problemas diseñados ad-hoc,
d) sus opiniones acerca del potencial didáctico y matemático del uso de Grapes.

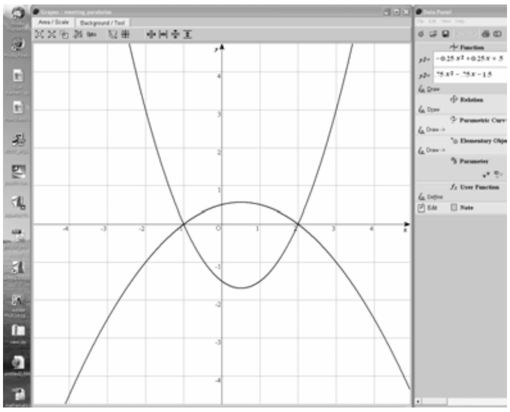
La entrevista no siguió un guión pre-establecido, sino consistió en una conversación libre que tuvo lugar a continuación de la resolución de los problemas por parte de los profesores, y en torno a los dos temas descriptos.

Uno de los maestros conoce a fondo el programa Grapes, así como otras herramientas tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas (llamémoslo A), mientras que el otro (llamémoslo B) carece de esa experiencia. Al comienzo de la sesión, se le explicó muy brevemente a B como usar las dos funcionalidades más importantes de Grapes (introducir la expresión simbólica de una función o de una relación y requerir sus gráficos), y él recibió asistencia técnica mínima durante la entrevista según la necesitare. Los dos profesores trabajaron simultáneamente, pero por separado, en los tres problemas siguientes (en este orden). Las conversaciones tuvieron lugar después de concluir la resolución de cada problema, y relacionadas con ellos. Hacia el final, se discutieron cuestiones más generales tales como el uso de tecnologías como ésta en el aula.

Produzca paralelogramos diferentes por medio de ecuaciones de líneas que se cortan, tal que sus vértices estén (0,0), (2,2) y (4,0). ¿Cuántos paralelogramos puede encontrar?

Use Grapes para graficar $x^2y + y^3 - x^2 - y^2 = 0$ *. Explique sus resultados.*

Reproduzca con Grapes la siguiente pantalla



Resultados principales

El Rol de la experiencia previa con el programa (y con tecnología en general)

Como era de esperar, las soluciones y los procesos de resolución de los dos profesores dependieron en gran parte de sus experiencias previas con tecnología en general, y específicamente con Grapes. A continuación se enumeran algunas de las maneras de trabajo a las que se les puede atribuir la experiencia previa (o su ausencia) y así explicar las diferencias en sus procesos de solución.

- En general, A abordó los problemas usando Grapes solamente, y casi no usó lápiz y papel. B hizo uso amplio del lápiz y papel, a veces antes de usar Grapes, a veces en paralelo, y a veces después de usar Grapes.

- En el primer problema, A se preocupó del trazado del paralelogramo (con cuarto vértice en (6,2)), y puso especial énfasis en establecer en Grapes el dominio de la función lineal, para no obtener el gráfico de toda la línea, sino sólo el segmento que constituye el lado del paralelogramo deseado. Nuestra hipótesis es que su experiencia con el uso del programa o llevó a eso. En cambio, B comenzó trazando en el papel los puntos dados, y se dedicó a considerar todas las posibilidades para la ubicación del cuarto vértice, antes de usar Grapes. El no se preocupó del dominio, y cuando los gráficos fueron trazados, él estuvo satisfecho con los tres paralelogramos obtenidos emergiendo de entre las gráficas de todas las funciones lineales.

- En el primer problema, A comparó este programa con las construcciones geométricas obtenibles mediante programas como Cabri, en el cual uno pudo haber completado la construcción sin haber aplicado ningún conocimiento de gráficos o álgebra, usando solamente un “macro” para la construcción de líneas paralelas a líneas dadas que pasan por puntos requeridos. Por lo tanto, él considera valioso hacer esta actividad con Grapes, porque lo fuerza a uno a aplicar los conocimientos de funciones (y de geometría analítica), ya que no hay otra manera de dibujar una figura en la pantalla.

- En el tercer problema, A concibió que el objetivo del problema es localizar y trazar dos miembros de la familia de parábolas de la forma $y = a(x-2)(x+1)$, y uso la capacidad del programa para cambiar el parámetro *a* dinámicamente para obtener los dos gráficos requeridos. B escribió tres formas simbólicas para la parábola: $y = ax^2 + bx + c$, $y = a(x-p)^2 + n$, y $y = a(x - x_1)(x + x_2)$ y decidió que la tercera era la más apropiada para usar en la resolución de este problema. Si bien uso la misma fórmula que A, lo hizo de una manera diferente. La tomó como una ecuación en *a* que debe satisfacerse para (3,3), un punto que él observó como perteneciente a la parábola abierta hacia arriba (es decir, 3=a(3-2)(3+1)) y (3,-1) como un punto de la otra parábola.

- A, aparentemente debido a su conocimiento de las características del programa, se ocupó mucho de fijarse en el uso de las escalas, y fue muy consciente que éstas influyen lo que uno ve o no ve en pantalla. Por lo tanto, cuando se sorprendió por el gráfico que obtuvo en el segundo problema, su primer reacción fue cambiar las escalas para cerciorarse que el gráfico es lineal en todas partes. B reaccionó de manera diferente a la sorpresa. El se volcó al lápiz y al papel para trabajar la forma algebraica y buscar en ella la explicación. Finalmente, ambos se dedicaron a cambiar escalas para ver cómo y cuándo el punto aislado (0,0) sería observable en pantalla.

Opiniones acerca del potencial del programa

- Ambos profesores estuvieron más dispuestos a conversar sobre sus propios proceso de resolución que sobre el potencial del programa para su uso en el aula.

- Un sondeo de sus opiniones mostró que para ellos los siguientes puntos son importantes desde el punto de vista pedagógico y matemático: la posibilidad y la facilidad del uso de escalas, (y así poder observar el mismo gráfico en escalas diferentes), la posibilidad de encontrase con sorpresas e investigar sus orígenes (en su opinión, si el segundo problema hubiera solicitado analizar el gráfico a obtener antes de graficarlo, no hubiera habido sorpresa alguna y por lo tanto hubiera habido menos aprendizaje que en la presente versión en la cual uno se vuelca a los símbolos para explicar un gráfico inesperado – esto acerca más a la relación entre gráficos y sus ecuaciones de lo que puede ser el caso sin usar tecnología), la posibilidad de cambiar dinámicamente los parámetros para apreciar mejor familias fe funciones.

- El problema del que ambos profesores gustaron más fue el segundo problema debido a la sorpresa que experimentaron..

- Ambos vacilaron acerca de la posibilidad de traer este tipo de problemas a sus aulas. A afirmó que es difícil discutir problemas aislados sin tener en cuenta todo el currículum, y sin discutir otra variable importante, el nivel de los alumnos.

- Cuando se les preguntó por qué ellos piensan que los profesores en Japón no usan tecnología en sus aulas, B dijo que los docentes tiene poca experiencia en usar la tecnología ellos mismos, y quizá no vean el beneficio de usarla. A dijo que en la escuela secundaria lo que determina mucho son los exámenes de ingreso a las universidades, y como estos no incluyen problemas a resolver usando tecnología, ésta no entra en las aulas.

- Cuando se les peguntó que tareas pueden ser apropiadas para ser resueltas con Grapes, A, que enseña sobre Grapes en cursos para estudiantes de graduación, dijo que le hará esta pregunta a sus estudiantes!.

Algunas sugerencias para lecturas complementarias

Libros

Romberg, T.A., Fennema, E. and Carpenter, T.P. (Eds.), 1993, *Integrating Research on the Graphical Representations of Functions.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Todos los capítulos de este libro son muy recomendables para quién quiera aprender sobre las cuestiones más importantes relacionadas con el uso de tecnologías para la representación gráfica de funciones. Los distintos capítulos discuten los fundamentos, enfoques críticas, ejemplos, perspectivas curriculares y resultados de investigación.

Artículos

Arcavi, A. and Hadas, N., 2000, "Computer mediated learning: An example of an approach" *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, pp. 25-45.

Se describe como fenómenos geométricos pueden ser modelados, interpretados y estudiados usando representaciones gráficas de funciones en un entorno de geometría dinámica.

Dugdale, S., 1992, "Visualizing polynomial functions: New insights from an old method in a new medium", *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 11(2), pp.123-141.

Describe e ilustra la manipulación y exploración de representaciones gráficas de funciones polinomiales. Se reduce el énfasis en memorización de reglas a favor de la comprensión cualitativa del comportamiento funcional, de la visualización de relaciones funcionales y de la investigación gráfica de conceptos matemáticos..

Dugdale, S., 1982, "Green Globs: a microcomputer application for graphing of equations", *Mathematics Teacher*, 75, pp. 208-214

Green Globs es uno de los juego más exitosos, en el cual se desafía la comprensión de las funciones y sus gráficos por el usuario. Una descripción detallada de este juego puede encontrarse en el capítulo escrito por Dugdale en el libro arriba citado.

Yerushalmy, M. and Gafni, R., 1992, "Syntactic manipulations and semantic interpretations in algebra: The effect of graphic representation" *Learning and Instruction* 2, pp. 303-319.

Este estudio examina el efecto de las representaciones gráficas de funciones en el desempeño en tareas que involucran transformación de representaciones.

Yerushalmy, M. and Gilead, S., 1997, "Solving equations in a technological environment: Seeing and manipulating" *Mathematics Teacher* 90(2), pp. 156-163.

Describe los usos de programas gráficos para resolver ecuaciones en la escuela intermedia y los efectos que eso ha tenido en el aprendizaje.

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html

This web site includes a compendium of the most interesting curves, their equations and history. It may serve a source of examples to explore.