

平成 16 年度文部科学省拠点システム構築委託事業
派遣現職教員支援課題（課題代表：礪田正美）

関数グラフソフト GRAPES の多言語化と 国際教育協力活動での利用

報告書

平成 17 年 2 月

筑波大学教育開発国際協力研究センター (CRICED)

はじめに

筑波大学教育開発国際協力研究センター(CRICED)では、文部科学省の推進する国際教育協力における拠点システム構築委託事業の一課題として、平成15年度より青年海外協力隊、シニア海外ボランティア等として派遣される現職教員を支援する事業を推進している。本年度は、課題「派遣現職教員支援と支援ネットワークの形成による支援方法の拡充事業」（以下、派遣現職教員支援課題）として活動が行なわれた。

本課題の目的は、派遣される現職教員に対して、蓄積された経験や協力モデルを伝達し、開発途上国での活動経験の浅い現職教員を教育内容面・方法面で組織的・体系的に支援することを目的としている。本課題は、国際協力機構・青年海外協力隊事務局との協力のもと、課題を推進している。

本課題による支援のひとつとして、派遣中の教育活動ニーズに応じた教材教具の開発を行なっている。平成15年度は、関数グラフ描画ソフト GRAPES を英語化した。本年度は、GRAPES をスペイン語化し、GRAPES 利用を促進するために実践事例の収集と GRAPES を用いた学習の分析を行なった。本報告書は、平成16年度の GRAPES に関わる活動の成果をまとめたものである。

平成17年2月15日

課題代表者 磯田 正美

課題代表者

磯田 正美 筑波大学教育開発国際協力研究センター助教授

執筆者

宮川 健 筑波大学教育開発国際協力研究センター産学官連携研究員
牛山 敏章 長野県箕輪工業高等学校教諭
杉浦 梨絵 筑波大学教育開発国際協力研究センター技術補佐員

協力者

友田 勝久 大阪教育大学附属高等学校池田校舎教諭
Elis A. Quintanilla エルサルバドル・国立アポパ高等学校教諭
Dilsa D. de Cubilla パナマ・ウラカ高等学校教諭
Betsy Batista パナマ・ウラカ高等学校教諭
Argelia Pinilla パナマ・ウラカ高等学校教諭
Pablo Ramos パナマ・ウラカ高等学校教諭
Dolando Pére パナマ・ウラカ高等学校教諭

目次

GRAPES に関する活動の概要.....	1
GRAPES を用いた学習の理論分析.....	9
GRAPES を用いた学習の実践事例.....	27
エルサルバドルでの GRAPES の活用.....	29
パナマ国ウラカ高校への数学授業への GRAPES の導入.....	37
GRAPES をユーザーズマニュアルスペイン語版.....	45

同梱 : GRAPES スペイン語版 CD-ROM

GRAPES に関する活動の概要

1 はじめに

筑波大学教育開発国際協力研究センター (CRICED) では、文部科学省の委託を受け、拠点システム構築事業派遣現職教員支援課題を推進している。本課題の目的は、青年海外協力隊、シニア海外ボランティア等として派遣される現職教員に対して、蓄積された経験や協力モデルを伝達し、開発途上国での活動経験の浅い現職教員を教育内容面・方法面で組織的・体系的に支援することを目的としている。

その一環として、CRICED では、GRAPES を多言語化することにした。その必要性は以下の点から生じた。

- 世界的動向

近年の科学技術の発展に伴い、数学教育におけるテクノロジー利用が世界的に進められている。特に、コンピュータ上で動作するさまざまなソフトウェアは、今までの紙と鉛筆では難しかった、数学性質の視覚的・動的な探求を可能にする。例えば、作図・幾何ソフトや関数グラフソフトなどである。現在日本ではこれらのソフトウェアを用いた実践が多くおこなわれている。

- 協力国の現状

我が国が国際教育協力をおこなっている国々においても、教育実践におけるテクノロジーの利用が進められており、学習用のソフトウェアを利用する環境が整っているところも少なくない。実際、最貧国を除く発展途上国・中進国の中等学校では、コンピュータ室などハード面の設備を備えているところが多い。しかし、金銭面の問題から、ソフトウェアは海賊版のことが多く、またそれらの設備を十分活用しているとは言いがたいのが現状である。

- 我が国のポテンシャル

一方、我が国では、教育用のソフトウェアが個人によってフリーウェアとして多く開発され、授業実践に用いられている。そして、フリーウェアにもかかわらず非常に完成度の高いものも少なくない。しかし現状では、ソフトウェアが日本語版のみのため、国際教育協用にこれらを用いることができない。特に現職教員は、日本では実践にこれらのソフトウェアを用いていたとしても、派遣国で利用し、普及させることはできない。

このような現状において、関数グラフソフト GRAPES の翻訳を現職派遣支援事業の一環として手がけたのである。GRAPES は、数学教育用のソフトウェアであり、個人によって開発された非常に完成度の高いフリーウェアである。GRAPES は、関数によるグラフや軌跡をマウスによる簡単な操作で描くとともに、様々な角度から探求することができる、高性能な純日本製関数グラフソフトである。

本報告書は、平成 16 年度に行なった GRAPES の多言語化、及びその利用についての活動内容をまとめたものである。以下、まず GRAPES の概要を示し、平成 16 年度の活動内容の概略を示す。活動の詳細は、次章以降に報告されている。

2 GRAPES の概要

中等教育を対象とした教授・学習を支援するソフトウェアは多く開発されている。しかし、実践現場において実際に用いられているものは多くない。このような現状の中で、関数学習に焦点をあてた GRAPES¹は、日本の中学校・高等学校、さらには大学の教室において比較的多く用いられているソフトウェアである。GRAPES は、大阪教育大学附属高等学校の友田勝久教諭が開発した純日本製のソフトウェアであり、フリーウェアとして配布されている²。

今日まで、Computer Algebra System (CAS) と呼ばれる数式処理やグラフの描画をおこなう多くのソフトウェアが開発されてきた。GRAPES は、既存の Mathematica, Mapple, Derive, MathCAD, MuPAD などの CAS と異なり、学習、特に関数の学習に焦点をあてたソフトウェアである。そのため、複雑な計算を代わりにやってくれるものではない。また、GRAPES は、既存の CAS と比べ、非常に小さいソフトウェアである。Web ページよりダウンロードも容易であり³、古いコンピュータでも動作する⁴。GRAPES の主な機能は、中等教育及び大学初年度に扱われる大抵の関数を瞬時に描画すること、パラメータを動かすことにより動的に関数を描画できることである。これらにより関数を視覚的・動的に探求できるのである。GRAPES のインターフェイスを図 1 に示した。

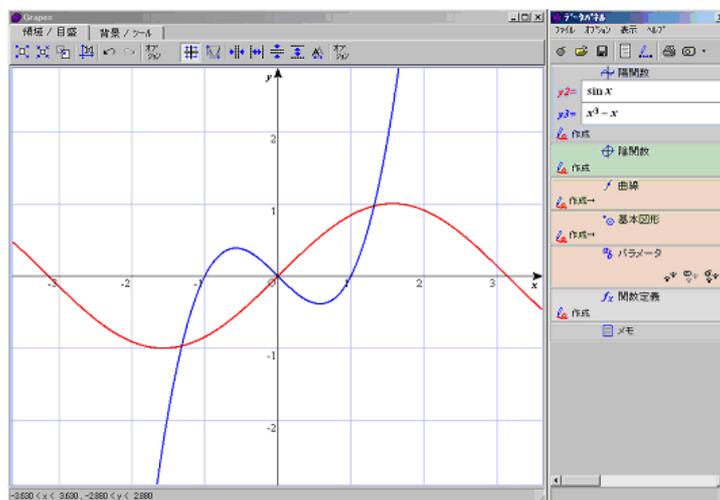


図 1: GRAPES のインターフェイス

詳細は、資料として添付の GRAPES 利用マニュアルに示されている。また、現在公開されている、GRAPES は以下の URL よりダウンロードできる。

¹Graph Presentation & Experiment System

²<http://okumedia.cc.osaka-kyoiku.ac.jp/tomodak/grapes/>

³本体は、圧縮された状態で 500KB 弱である。

⁴OS: Windows 95 以上；CPU: Pentium 200MHz 以上推奨；メモリ：32MB 以上；ハードディスク：2MB

英語版	http://www.criced.tsukuba.ac.jp/grapes/
スペイン語版	http://www.criced.tsukuba.ac.jp/grapes/es/
日本語版	http://okumedia.cc.osaka-kyoiku.ac.jp/tomodak/grapes/

3 GRAPES 多言語化及び利用の活動状況

3.1 平成 15 年度

拠点システム構築事業の初年度である平成 15 年度には，GRAPES の英語版を完成させ，利用マニュアル，Web ページ，180 個にのぼるサンプルを翻訳した．英語圏の協力国で利用するだけでなく，他言語化する上でも必要となるものである．実際，平成 16 年度に行なったスペイン語化では，協力国のカウンターパートの協力を得て行なわれ，その際の翻訳元のバージョンは，英語版が利用された．現地のネイティブスピーカーの協力を得て翻訳する際には，日本語版では意味はなさないが，英語版であれば，十分参考にすることができる．

3.2 平成 16 年度

平成 16 年度は，スペイン語へ翻訳するとともに，青年海外協力隊で派遣されている派遣現職教員，及び協力隊員が実践に利用した．また，GRAPES 利用を促進するために，数学学習における GRAPES 利用の影響・効果を理論的に分析した．

3.2.1 スペイン語化

筑波大学では，国際教育機構 (JICA) の国際教育協力の一環で，中南米における算数・数学の学力向上のプロジェクトに関わっている．中南米の協力国で GRAPES を利用するためには，スペイン語への翻訳が必要であるとともに，スペイン語化は中南米の大半の国での利用を可能にする．

平成 16 年度にスペイン語に翻訳したものは，GRAPES の本体，利用マニュアル，ホームページ，サンプルの 4 点である．それぞれの翻訳は，中南米に派遣されていた派遣現職教員，協力隊員，及び現地の数学教員など以下の協力者によって行なわれた．

- GRAPES 本体

Dilsa D. de Cubilla	パナマ・ウラカ高等学校教諭
Betsy Batista	パナマ・ウラカ高等学校教諭
Argelia Pinilla	パナマ・ウラカ高等学校教諭
Pablo Ramos	パナマ・ウラカ高等学校教諭
Dolando Pére	パナマ・ウラカ高等学校教諭
杉浦梨絵	青年海外協力隊員平成 14 年度 1 次隊数学教師
友田勝久	大阪教育大学附属高等学校池田校舎

- GRAPES 利用マニュアル とサンプル
 - 牛山敏章 青年海外協力隊員平成 14 年度 1 次隊数学教師
 - Elis A. Quintanilla エルサルバドル・国立アポパ高等学校教諭
- GRAPES ホームページ
 - 杉浦梨絵 青年海外協力隊員平成 14 年度 1 次隊数学教師
 - 宮川 健 筑波大学教育開発国際協力研究センター
 - 友田勝久 大阪教育大学附属高等学校池田校舎

スペイン語に翻訳された GRAPES の利用マニュアルを資料に添付した。さらに、GRAPES スペイン語版の本体・サンプル・マニュアル・ホームページを CD-ROM に入れ、添付した。また、CD-ROM には、参考までに昨年度作成した GRAPES の英語版と日本語版も格納されている。

3.2.2 GRAPES を用いた実践活動

GRAPES のスペイン語化に携わった協力者が、GRAPES を用いた数学の授業を企画し、協力国にてカウンターパートと共に授業を行なった。GRAPES は、単なるソフトウェアであり、利用されなければ意味をなさない。今回の実践活動は、GRAPES スペイン語版を用いた国際教育協力の初めての試みであった。実施国及び実施者は以下のとおりである。詳細は、「GRAPES を用いた実践事例」に報告されている。

- エルサルバドル・国立アポパ高等学校
 - 牛山敏章 (青年海外協力隊員平成 14 年度 1 次隊数学教師)
- パナマ・ウラカ高等学校
 - 杉浦梨絵 (青年海外協力隊員平成 14 年度 1 次隊数学教師)

3.2.3 GRAPES を用いた学習の理論分析

GRAPES は、日本においても比較的利用されてきた。しかし一方で、GRAPES に関する数学教育学研究は少なく（実践報告は多い）、堅固な理論的な後ろ盾があ

るわけではない。つまり、実践現場の先生方が経験的にその有用性を認識してきたのである。GRAPES の利用を促進するためには、特に海外で利用する際には、その説得力が必要となる。単にソフトウェアを提案するだけでは、なかなか利用してもらえない。利用を促進するためには、GRAPES を用いた学習のメカニズムを解明することも必要である。また、このような科学的な分析は、より効果的な GRAPES の利用方法や GRAPES を用いた教材開発に役立つ。

そこで、本年度は、GRAPES においてもっとも利用される機能、関数のグラフの自動描写機能に焦点をあて、この機能が関数の学習においていかなる側面に働きかけるのか、いかなる数学知識の獲得に寄与するのか理論的に分析した。詳細は、「GRAPES を用いた学習の理論分析」に報告されている。この分析は、表記法の側面からのみ行なわれ、必ずしも十分とは言えない。今後も継続して実証的に分析していく必要がある。また、GRAPES の他の機能にも焦点をあてる必要もある。

4 今後の課題

国際教育協力における関数グラフソフト GRAPES の利用に関して、以下の事項が今後の課題となる。

- 多言語化の推進
我が国が、国際教育協力を行なっている協力国は数多いが、英語版とスペイン語版、フランス語版を用意すれば、協力国の大部分をカバーすることができる。今後は、GRAPES のフランス語版を作成することが第一の課題である。そして同時に、協力国に応じて GRAPES の多言語化を進める予定である。
- 実践活動の促進と実践事例の収集・分析
国際教育協力における GRAPES やテクノロジーを用いた数学学習・教授のより適切な方法を探るために、派遣現職教員及び協力隊員による GRAPES を用いた実践活動の推進、実践事例の収集が課題となる。実際、今後の派遣現職教員らによる国際教育協力を体系的に進めるためには、より多くの実践事例を収集し、それらを分析することが不可欠になる。
- GRAPES を用いた教材の開発
ソフトウェアを提供するだけでは、実際にどのように使ったらいいのか、そして実際に数学学習にどのような影響・効果があるのか、不明確である。GRAPES 利用を促進するためにも、ある程度 GRAPES を用いた教材を用意する必要がある。さらに、その教材を説得力のあるように提案するためには、科学的な分析に基づいた教材開発が必要となる。より踏み込んだ GRAPES 利用の分析・検討は今後の課題である。

GRAPES を用いた学習の理論分析

関数学習における GRAPES の自動描画機能

宮川 健*

平成 17 年 2 月 15 日

目次

1	はじめに	12
2	GRAPES の特徴	12
2.1	GRAPES の一般的な利用方法	13
2.1.1	プレゼンテーション利用	13
2.1.2	個人利用	13
2.2	GRAPES とグラフ電卓	14
2.2.1	フリーウェア	14
2.2.2	表示機能	14
2.2.3	代数計算は学習対象外	15
3	グラフの自動描画機能	15
3.1	関数学習	16
3.1.1	関数の定義	16
3.1.2	関数の表現	16
3.2	紙と鉛筆を用いたグラフ描画に必要な数学知識	18
3.2.1	数的アプローチ	19
3.2.2	代数的アプローチ	20
3.2.3	紙と鉛筆の場合のまとめ	22
3.3	GRAPES を用いたグラフ描画	22
3.3.1	自動描画の利用	22
3.3.2	GRAPES による自動描画機能と紙と鉛筆による描画	23
3.3.3	代数計算の位置付け	25
4	おわりに	26

*筑波大学大学院人間総合科学研究科 (教育開発国際協力研究センター)

1 はじめに

今日，世界各国の中等教育においてテクノロジーを用いた学習が盛んに推進されており，教授・学習を支援する様々なソフトウェアが開発されている．このことは，数学の関数学習においても同様である．グラフ電卓や Computer Algebra System (CAS) と呼ばれる数式処理ソフトを始め，多くのソフトウェアが開発されてきた¹．しかし，実践現場において実際に用いられているものは多くない．このような現状の中で，関数学習に焦点をあてた GRAPES² は，日本の中学校・高等学校，さらには大学の教室において比較的多く用いられているソフトウェアである．そこで，拠点システム構築事業の派遣現職教員支援課題では，GRAPES がフリーウェアであることもあり，国際教育協力においても GRAPES 利用を推進することにした．ところが，これまで GRAPES が純日本製のソフトウェアであり，個人が開発していることから，日本語版のみであり，多言語版が存在しなかった．そこで，派遣現職教員支援課題では，多言語化を進め，現在，英語版とスペイン語版が完成している．

GRAPES の多言語化が進む一方で，その利用を促進する必要がある．実際，日本で利用するのであれば，日本語のソフトウェアに限られるが，協力国からすれば選択肢はより広く，日本のソフトウェアはその選択肢のひとつに過ぎない．つまり，我が国の国際教育協力において，より説得力をもって GRAPES を提供していく必要があるのである．派遣現職教員支援課題では，GRAPES 利用を促進するため，国際教育協力における GRAPES を用いた教授・学習の実践事例を収集するとともに，GRAPES 利用の数学学習への影響を科学的に分析することを試みている．本稿では，この後者の第一歩として，グラフ描画ソフトとしての GRAPES の特徴を検討し，GRAPES においてもっとも利用される機能であるグラフの自動描画機能に焦点をあて分析を進める．第2章に報告されている実践事例においても，この機能が主として利用されている．

2 GRAPES の特徴

今日まで，数式処理やグラフの描画をおこなう多くのソフトウェアが開発されてきた．GRAPES は，既存の Mathematica, Mapple, Derive, MathCAD, MuPAD などの CAS と異なり，学習，特に関数の学習に焦点をあてたソフトウェアである．複雑な計算を代わりにやってくれるものではない．そのため，GRAPES は，既存の CAS と比べ，小さなソフトウェアであり，容量は小さく，古いコンピュータでも動く．この点は，国際教育協力において利用するためには重要な点になる．

GRAPES の主な機能は，中等教育及び大学初年度に扱われる大抵の関数を描画すること，パラメータを動かすことにより動的に関数を描画できることである．こ

¹例えば，http://mathforum.org/library/topics/graphing_pc/ を参照．

²GGraph Presentation & Experiment System

れらにより関数を視覚的・動的に探求できる．このような用途の用具としては，他にグラフ電卓があげられるであろう．

以下では，まず GRAPES の一般的な利用方法から，そして同様の機能を持つグラフ電卓と比較することから GRAPES の特徴を分析する．

2.1 GRAPES の一般的な利用方法

ソフトウェアの位置付けから，GRAPES の利用方法は，大きく別けて「プレゼンテーション利用」と「個人利用」のふたつが可能である．以下，それぞれの方法を簡単に検討する．

2.1.1 プレゼンテーション利用

教室における一斉授業の際に，プロジェクタ等を用いて教師が曲線や関数のグラフを子どもに見せるといった提示型の GRAPES 利用方法が「プレゼンテーション利用」である．この方法は，コンピュータ室でなくとも，教師のノートパソコンとビデオプロジェクタがあれば実施可能である．国際教育協力の協力国では，ひとクラスの数分のコンピュータを用意することが難しい場合もあれば，通常の授業の一環として普通教室で授業を行ないたい場合もある．このような場合にも，GRAPES を容易に用いることができるのである．第2章の2つの実践事例では，両者ともこの利用方法を用いている．

プレゼンテーションに利用できることは，GRAPES のひとつの大きな利点である．グラフ電卓などの個人利用を前提としたものでは，グラフ電卓の画面を投影する特別の機器が必要であったり，コンピュータに接続してビデオプロジェクタで投影する必要があるため，必ずしも容易ではない．さらに，準備・設定する GRAPES は，教師のコンピュータのもののみのため，次の「個人利用」と比べ，労力と経費がかからない．

2.1.2 個人利用

一人もしくは二人の学習者に1台のコンピュータが割り当てられ，学習者自身が直接 GRAPES を用いて学習する場合が「個人利用」である．この場合，学習者自ら主体的に様々な探求・実験ができる．例えば，学習者が描画してみたい関数の代数式を瞬時に表示することができ，入力する関数の代数式と描画されるグラフとの対応を学習者の文脈で学習できる．プレゼンテーション利用の場合であれば，一斉授業において教師が GRAPES を操作するため，ひとりの学習者が試してみたいことや意見などを反映することは必ずしも容易ではない．

一方，準備や機材に関しては，プレゼンテーション利用より必要となるものが多い．個人利用の場合，学校の一斉授業であれば，コンピュータ室で行なわれ，事

前に全てのコンピュータ用の GRAPES を用意する必要がある。プレゼンテーション利用の場合と比べれば、手間がかかる。しかしながら、他の CAS と比べれば、この手間は少ないものである。GRAPES は CD-ROM から起動可能であり、必ずしも全てのコンピュータにソフトウェアをインストールする必要はない。コストはかかるが、GRAPES を保存した CD-ROM をコンピュータの台数分用意すればよいのである。また、何か特定の課題に取り組む場合は、教師が GRAPES のファイルを用意する必要があるが、この場合も、GRAPES を保存した CD-ROM に教材のファイルも保存しておけばよい。

2.2 GRAPES とグラフ電卓

GRAPES は、関数のグラフを自動で描写することができるが、この機能は、多くのソフトウェアで可能であり、グラフ電卓でも利用できる。近年、数学の通常の授業にグラフ電卓が利用されている国も多い³。協力国においても、今後、グラフ電卓の利用が進む国は少なくないであろう。例えば、実践事例で取り上げるパナマでは、グラフ電卓はまだ普及していないが、すべての生徒が関数電卓を用いて授業を受ける。この現状を見るとグラフ電卓の導入も遠くはないと感じる。

そこで、ここでは、GRAPES をグラフ電卓と比較することによってその特徴を探る。GRAPES はグラフ電卓と何が異なり、何を可能にしてくれるのであろうか。

2.2.1 フリーウェア

まず、もっとも異なる点は、GRAPES がフリーウェアであるところである。グラフ電卓の場合、多くは個人負担により電卓を購入することになる。グラフ電卓の導入が進んでいる国々では廉価で販売されているとは言え、必ずしも安いとは言いきれない。例えば、グラフ電卓は、安いもので、フランスでは 50 ユーロ程度、アメリカでは 40 ドル程度である。経済的な問題を抱える協力国では、全生徒が購入することはまだまだ難しいであろう。

さらに GRAPES はフリーウェアであるため、コンピュータがあれば、家庭、学校を問わず、学習者が自らの必要に応じてダウンロードし、利用できる。また、コンピュータ等の設備は整っているが、ソフトウェアを購入する余裕がない場合にも利用できるのである。

2.2.2 表示機能

GRAPES の表示機能は、明確にグラフ電卓に優る。GRAPES では、通常のコンピュータを利用できるため、画面は広く、利用できる色も多い。グラフ電卓で

³フランスやイギリス、アメリカを始め多くの国でグラフ電卓の利用を前提とした数学教授・学習が行なわれている。

は、まだ多くが白黒の液晶であり、当然ながら画面が小さい。このため、GRAPES では、様々な関数や曲線を同時に視覚化でき、さらに変数を用いれば動的にグラフを探求することもできる⁴。これらのことから、上述のプレゼンテーション利用に適しているのである。

2.2.3 代数計算は学習対象外

グラフ電卓と異なる点は、GRAPES は、代数計算を自動で行なわないところである。これは、グラフ電卓のみならず CAS とも大きく異なる点であり、かつ GRAPES が Computer Algebra System (CAS) ではないところである。

GRAPES を利用する際、必ずしも代数計算が必要となるわけではない。代数表記で与えられた関数は、式を代数計算により変形することなく、GRAPES を用いてグラフ表記に変換できる。この点においては、代数計算の技能の有無に関わらず GRAPES は利用可能なのである。このことは、代数計算が、GRAPES を用いた場合の学習対象ではないことを示している。したがって、「代数計算はできない」ではなく、「代数計算は必要がない」と捉えることができる。

一方、代数計算の技能があれば、関数や曲線の代数表記とグラフ表記との対応をより深く学習することが可能であろう。しかし、本稿ではこのことは扱わず、より基本的な機能にのみ注目する。

3 グラフの自動描画機能

GRAPES は、ある関数のグラフ表現を紙と鉛筆を用いて描くのではなく、関数の代数表現をコンピュータに入力するだけで、代わりに描いてくれる。これは GRAPES の主たる機能である。では、グラフをコンピュータが描いてくれるということは、数学学習において何を意味するであろうか？

このことを考察する準備として、まず関数学習においていかなる知識の獲得が望まれるか分析する。次に、一般的な紙と鉛筆を用いてある関数のグラフを描くこと、関数の代数表現からグラフ表現への変換をする際に、いかなる数学知識が求められるか分析する。そして、その結果に基づき、GRAPES を用いた場合に必要とされる数学知識を分析するとともに、グラフの自動描画がもたらすであろう関数学習を分析する。この機能は、GRAPES に限らず CAS やグラフ電卓も同様に備えるが、GRAPES 利用の学習においてもっとも頻繁に用いられる機能であることから、ここで取り扱う。

⁴最近のグラフ電卓では変数を用いて動的にグラフを描画できるものもある。カシオの fx-9700GE など。

3.1 関数学習

本節では、関数に関する活動においていかなる知識が求められるのか、関数の教授・学習への影響を分析するために、準備として簡単に関数概念そのものの性質を考察する。関数に関わる知識をすべて対象とすることはできないため、GRAPESのグラフの自動描画機能において重要となる側面、関数を表現する表記法についてのみ簡単に扱う。表記法は、それが異なれば、与えられる情報が非常に異なり、可能となる操作も異なってくる。GRAPESのグラフ自動描画機能は、この表記法の変換を行なっていると言える。そのため、関数を表現する表記法の分析は、グラフの自動描画機能の学習効果を分析することにつながるのである。

以下、まず関数概念の根本原理である定義を簡単に示し、それから表記法を分析する。

3.1.1 関数の定義

関数は、一般には、「ブラックボックス」や「入力と出力」などにたとえられる。集合間の対応として、次のように定義されることが多い。

2つの集合 X と Y において $a \in X$ に対して、 $b \in Y$ が一意に定まるような規則 f を X から Y への「関数」と呼ぶ。

中学校の教科書では、次のように対応として関数の定義が与えられている場合もあれば、明示されていないものもある。次は、対応として定義が与えられている場合であり、教育出版『中学数学2』(2003, p.53)の教科書から引用した。

2つの変数 x, y があって、 x の値を決めると、それに対応する y の値が1つ決まるとき、 y は x の関数であるという。

3.1.2 関数の表現

関数という数学概念は、「代数表記」、「グラフ表記」、「数表記(表)」、「日常言語表記」の4つの表記法を用いてしばしば表現される。これらの表記法への区分は、関数学習を考える際、非常に重要になる。実際、それぞれの表記法が与える関数についての情報は非常に異なり、問題を解決する際にそれぞれにおいて必要となる操作・手続きも異なってくる。以下、まずこれらの表記法のそれぞれの性質を探る。

- 代数表記

代数表記のもっとも大きな有効性は、具体的な数値を用いることなく関数の無限のインプット・アウトプットを示せる点にある。具体的な数値を用いた数表記では、このことは不可能である。これは代数表記そのものが数学の世

界で必要となった第一の理由であろう。また，代数表記においては，関数を代数式やその計算に結び付け，代数式の変形などから様々な情報を与えることができる。例えば， $f(x) = 0$ となる x の値や $x = 0$ のときの $f(0)$ の値などである。さらに，微分法の助けを借りれば，さらに関数の増減や極値なども正確に求めることができる。

- グラフ表記

グラフ表記においては，微分法を用いなくとも関数の増減や変化の大きさなどを視覚的に把握できる。数学では，幾何を見てわかるように，数学的対象の視覚化は非常に大きな役割を果たす。しかし一方，数表記で与えられる関数の正確な対応を示すことはできなく，代数表記において可能である関数の全ての対応をグラフ表記を用いて表現することもできない。

- 数表記 (表)

数表記は，関数の具体的な値を一覧とした表として示されることも多い。数表記では，関数のアウトプットを数値で正確に表現できる。そのため， $f(x)$ の値の大きさを具体的に正確に測ることができるのである。一方，代数表記において可能である関数の全ての対応を表現することは，グラフ表記同様できない。また，関数の増減の変化は，数値で明確に示せるものの，離散的であり，連続的な変化を表より把握することは容易ではない。

- 日常言語表記

最後に日常言語表記だが，これは操作的な表記と言うよりも，関数のある特徴にある名称を与え，特別なものとする機能をもつ表記である。例えば「関数」そのものを始めとし「頂点」「切片」「極値」「最大値」「最小値」などである。グラフ表記の特徴から名称が与えられたものが多く，グラフ表記とこの日常言語表記の対応はわかりやすいであろう。

これらは，それぞれの表記法の特徴，有用性は異なり，それぞれが補完的な役割を果たす。数学において関数を扱う際には，それぞれの表記法に特有の技能・知識とそれぞれの間をスムーズに行き来できる技能・知識が必要となる。これらの知識・技能を身につけることは，関数の学習における大きな学習目標であろう。

では，関数において注目される数学的対象それぞれが異なる表記法によっていかに表現されるか考察してみる。

関数を扱う際には，目的に応じて様々な対象に注目される。例えば，ある関数の最大値・最小値はもっとも注目される対象のひとつであろう。その他，入力の変化に対応する出力の変化の仕方は，我が国の中学校では「変化の割合」，高等学校では「微分」「導関数」などとして学習対象となっている。

そこで，以下，表 1 に関数において注目される対象をリストアップし，それぞれの表記でいかに表現されるか示した。それぞれの対象を表現するためには，日

常言語表記を用いた．日常言語表記は，多くの場合，それぞれの表記における数学的对象を命名するために用いられるため，日常言語表記の欄は作成しなかった．

No.	代数表記	グラフ表記	数(表)表記
1	$f(x) = ax + b$ の a	直線の傾き	変化の割合
2	(b, c) s.t. $f(x) = a(x - b)^2 + c$	2次関数の頂点	最大値・最小値
3	$(a, 0)$ s.t. $f(a) = 0$	x 軸との切片	出力が 0
4	$(0, f(0))$	y 軸との切片	入力が 0
5	微分 $f'(a)$	接線の傾き	変化の割合
6	導関数 $f'(x)$	別のグラフ(導関数)	
7	$(a, f(a))$ s.t. $f'(a) = 0$	頂点	極値

表 1: 注目される対象

3.2 紙と鉛筆を用いたグラフ描画に必要となる数学知識

関数の代数表現は，しばしば他の表現方法よりも特別に扱われる．数学において，代数表記が中心的に扱われることと同様に関数の問題を扱う際にも，代数表記を用いることが非常に多い．このことは様々な計算を可能にすることや，グラフ表現や表による表現に比べ代数表現が暗示的な点が少ないことに起因すると考えられる．そのため，関数の代数表現からグラフ表現への変換は，関数に関わる問題を解決する際に頻繁に行なわれ，問題を解決する上で非常に重要な位置付けにある．

学校教育における数学においても，関数に関する代数表記の位置付けは数学におけるものと同様であり，代数表現からグラフ表現への変換はひとつの学習対象となっている．

では，代数表現からグラフ表現への変換にはいかなる数学知識・技能が必要となるであろうか？簡単な例より考えてみることにする．次の関数の代数表現をグラフ表現へ変換する問題が与えられたとしよう．

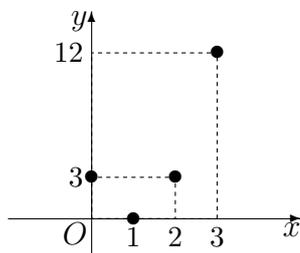
$$f(x) = 3x^2 + 2x - 8x + 3 \quad (1)$$

この問題を解決するためにどのようなアプローチが可能か，考察してみる．まず，大きく別けて，次のふたつのアプローチが可能と考えられる．

1. 数的アプローチ

数的アプローチとは，ある x に対し，対応する値 $f(x)$ を導き出し，それを xy 座標上にプロットし，グラフ表現を導き出すものである．この場合， x と $f(x)$ の対応は，座標上に点として表現される．そのため，ひとつの x の値に

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 3 \\
 f(1) &= 0 \\
 f(2) &= 3 \\
 f(3) &= 12
 \end{aligned}$$



対する $f(x)$ の対応だけではなく、より多くの x の値に対して、 $f(x)$ を求めることになる。関数のグラフ表現を描画するソフトウェアの大部分は、この数的アプローチを用いてグラフを描画する。

2. 代数的アプローチ

代数的アプローチとは、与えられた関数の代数表現を変形することにより、関数の代数的特徴を導き出す。それに基づきグラフ表現を作成する方法である。

これらふたつのアプローチに必要となる知識は完全に分離するわけではない。数的アプローチにおいても、代数的アプローチにおいても、特定の点をプロットする際には、数の代数式への代入や、数表記による関数の対応、数計算など共通の知識・手続きが用いられる。そのため、表記法の移行の観点から見ると、どちらの場合も、それぞれの表記法における手続きの数は異なるが「代数 数 グラフ」と変換されている。以下、それぞれのアプローチに必要とされる知識・技能をもう少し詳しく見ていくことにする。

3.2.1 数的アプローチ

数的アプローチの際に必要な数学知識・技能を簡単に考察する。多くの場合、まずは x に単純な小さな数を代入し対応する $f(x)$ を求めるであろう。例えば、 $f(1) = 3 \times 1^2 + 2 \times 1 - 8 \times 1 + 3 = 0$ といった計算を行ない、得られた値を xy 座標にプロットする。そして、それ以外の値に対しても同様に値を求め座標にプロットしていく。例えば、以下の4つの値からは、下図のように4つの点をプロットできる。

ここでは、ある値 a とそれに対応する値 $f(a)$ が、 xy 座標において $(a, f(a))$ という点として表現されることが重要になる。つまり、対応する一組の数値が点へと変換されるといった認識が必要となる。そして、座標に関する知識も必要となる。

ある a に対応する $f(a)$ を求めるためには、代数的な計算は必要ない。式 (1) を

簡単な式に変形してから数値を代入する方が計算は簡単であるが、式変形をしなくとも、計算間違いさえしなければ、同じ対応する値を得ることができる。

一方、代数表現で与えられた関数のグラフがどのような形状になるか知っているか否かは、数的アプローチにおいても重要な知識のひとつになる。これは、次の「代数的アプローチ」においても必要となる「代数表現からグラフの概形の推定」にあたる。上の例では、2次曲線もしくは放物線になることや上下のどの方向に開いているかなどである。実際、この知識がなければ、無限個の全ての点をプロットすることはできないため、いくつかの点はプロットできてもプロットのみから連続したグラフを作成することは難しい。

3.2.2 代数的アプローチ

ふたつめのアプローチは代数的アプローチであった。上で取り上げた例を用いて代数的アプローチにおいて必要となる知識を簡単に考察する。多くの場合、次のような手順をとるであろう。

代数式(1)を次のように変形し、放物線の頂点の座標を求め、元の代数式より y 軸との切片を特定し、これらの点を通り上に開いた放物線を描く⁵。

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 2x - 8x + 3 \\ &= 3x^2 - 6x + 3 \\ &= 3(x^2 - 2x + 1) \\ &= 3(x - 1)^2 \end{aligned}$$

この解法において、「代数計算」「代数表現からグラフの概形の推定」「グラフ表現における代表的な点の抽出」「代表的な点に対応する代数表現の抽出」「数値計算」に関する知識が主に用いられる。

代数計算 代数式の変形においては、簡約化や因数分解、平方完成(特に2次式の場合)などの「代数計算」に関する知識が必要となる。式変形は、関数のグラフ表現における特別の点を得やすいように、グラフの特徴を推定しやすいように、見通しをもって行なわれる。この際、代数表現とグラフ表現との対応が多かれ少なかれ想定されている必要がある。つまり、代数式の変形においては、以下で扱う「代表的な点に対応する代数表現の抽出」が前提となっているのである。

⁵微分法を用いて極値等を導き出す方法もあるが、ここでは代数式の変形からの解法を考察する。

代数表現からグラフの概形の推定 グラフを描く際には、まず、関数の代数表現及びその変形からグラフの概形が推定されている必要がある。実際、紙と鉛筆を用いた場合、代数表現に対応するすべての点をグラフにプロットすることはできなく(コンピュータは与えられた平面上において視覚的にはほぼすべての点をプロットするが)、いくつかの点をプロットしたのち、グラフの概形をもとに全体像を描くことが求められる。例えば、代数式が2次であることから放物線となる、2次の係数が正だから上に開いた放物線となる、などである。代数表現からグラフの概形への対応、移行がグラフを描くことに必要となるのである。

グラフ表現における代表的な点の抽出 グラフを実際に描く際には、グラフが通るであろういくつかの点が xy 座標上に既にプロットされている必要がある。グラフの代表的な点を抽出、特定する必要があるのである。代表的な点は、頂点や軸との切片などのグラフにおいて特別なステータスを持つ点、及び数値計算が容易に得られる点である。前者に関しては、推定されたグラフの概形から抽出される。上の場合であれば、グラフが放物線になると推定されているため、その頂点や x 軸と y 軸との交点が代表的な点として抽出される。この際、主に関数のグラフ表現、つまりグラフの概形において活動が行なわれる⁶。後者に関しては、数値計算が容易な点や頂点の近くの整数値を取る場合の点(例えば、上の場合であれば $(2, 3)$) を抽出する。これらの点は、代数式から判断されることが多いため、主に関数の代数表現においてこの活動が行なわれる。

代表的な点に対応する代数表現の抽出 また、代表的な点を xy 座標上にプロットするためには、それぞれの座標の値を求める必要がある。代表的な点の座標を具体的に求めるためには、代数表現において代表的な点を導き出す必要がある。「代表的な点に対応する代数表現の特定」の活動が必要となるのである。例えば、グラフ表現における「頂点」などの特徴的な点を代数表現において特定する。放物線の場合であれば、 $f(x) = a(x - b)^2 + c$ の代数式における (b, c) が放物線の頂点の座標になること、 $(0, f(0))$ が y 軸との切片の座標になること、 $(f^{-1}(0), 0)$ が x 軸との切片の座標になること、などであろう。これらは、「グラフ表現 代数表現」の対応・移行に関する知識である。

数値計算 次に、求める座標の具体的な数値を計算するためには、当然ながら数値計算が必要であり、得られた数値をグラフ上に対応させる活動が行なわれる。これらは「数的アプローチ」においても同様に行なわれるものである。そして最後に、グラフの代表的な点を通る、最初に推定されたグラフの概形が描かれること

⁶2次関数とその代表的な点の対応がルーチン化されている場合は、「グラフ表現」を利用せず、代数表現もしくは「2次関数」という言語表現から「頂点」などの代表的な点が抽出されることもある。

になる．例では，放物線である．そして，多くの場合，代表的な点以外は正確に描画されることはない．

3.2.3 紙と鉛筆の場合のまとめ

このように，グラフを描く作業には非常に様々な知識・技能が必要となる．ある意味，関数のグラフに関する学習の総まとめとなる活動である．学習者にグラフを描かせることは，これらの様々な知識をもっているかどうかテストすることでもあるとも言えよう．では，グラフを描けない学習者が，グラフを描けるようになるためには，どのような学習が必要になるのであろうか？おそらく，上で抽出した様々な知識を獲得できるより局所的な学習状況の設定が必要となるであろう．次節では，GRAPES の自動描画機能が，グラフ描画のために必要であった知識の獲得もしくは学習に何をもたらすか考察しよう．

3.3 GRAPES を用いたグラフ描画

GRAPES を利用するとグラフ描画の方法が大きく変わる．関数の代数式を GRAPES の電卓を用いて入力すればグラフが描けてしまう．上にあげた数的アプローチ，代数的アプローチを用いる必要がなくなる．グラフを描画するという活動のみにおいては，上で必要であった数学知識がまったく必要なくなるのである．代数計算をする必要も，グラフの概形を想定する必要も，代表的な点を特定する必要も，数値を計算する必要もなくなる．表記法の観点からすれば，代数表現からグラフ表現へ直接変換できる．

では，GRAPES がグラフを自動的に描画すると，関数に関する学習において，いかなる知識を養ったり，影響を与えたりするのであろうか？紙と鉛筆によるグラフの描画には様々な知識・技能が必要であった．GRAPES の自動描画機能はこれらの知識の一部を養うことができるのだろうか？それとも，何か別の知識を養うのであろうか？

以下では，上で分析した，紙と鉛筆を用いたグラフ描画に必要な知識・技能と GRAPES の自動描画機能の関係を考察する．

3.3.1 自動描画の利用

まず，数学学習における GRAPES の利用方法から，この意味を考えてみる．グラフの自動描画は，一般的に次の3つの利用法が主に考えられる．

1. グラフを描画する技能は習得されている．単に面倒だからコンピュータに描いてもらう．
2. グラフを描画する技能は習得されていないので，代わりにやってもらう．

3. グラフを描画する技能の習得のために GRAPES に描いてもらう。

これらの利用法は、グラフの自動描画のみならず電卓における数値計算にも共通することである。

1は、グラフを描く作業を非常に楽にしてくれるといった点からの利用法である。つまり、数学活動における時間的及び物質的な経済性を高めてくれる。グラフを描くのが非常に面倒であったり、複雑な場合は多くの手間を省いてくれるであろう。数学の問題を解く際には、この面倒さは大きな影響を与える。グラフを描くのが面倒だから代数表記内のみで考えることもある。この利用法を用いる際、グラフを描画する技能は、学習の対象となっていない。一般社会における計算に対する電卓の利用はこの利用法にあたる。また、教師が授業や試験の準備をする上で、代わりにコンピュータにグラフを描画させる場合にも、利用できる。この際も、グラフを描画する技能は習得されているが、経済性の問題で非常に有用である。

2は、グラフを描画する技能を持っていないため、代わりにコンピュータにグラフを描画してもらう利用法である。「代数 グラフ」の移行には、本来グラフを描画する技能が必要である。GRAPESはその技能なしにこの移行を可能にしてくれる、この場合も、グラフを描写する技能を学習の対象としていない利用法であるが、多くの場合、GRAPESが関数の代数式を入力しなければならないため、3の利用法に結び付くことが多いであろう。

3は、関数の学習に関わる利用法である。グラフを描画する技能は持っていないが、GRAPESが「代数 グラフ」の移行を学習者の代わりに行ってくれるために、学習者がグラフを描画する技能を学習する際の補助になるといった利用法である。

では、この3番目のグラフの自動描画機能の可能性を探ってみる。

3.3.2 GRAPES による自動描画機能と紙と鉛筆による描画

上で分析した紙と鉛筆を用いた場合のグラフ描画に必要であった知識・技能とグラフの自動描画機能の関係を探ろう。紙と鉛筆でのグラフ描画においては、「代数計算」「代数表現からグラフの概形の推定」「グラフ表現における代表的な点の抽出」「代表的な点に対応する代数表現における値の抽出」「数値計算」が必要とされる知識であった。自動描画機能はこれらの知識にいかに関与させることができるだろうか？ある関数のグラフ表現を座標上に描画することのみが、学習の目的であり、一度描画されればそれで終わりの学習であれば、GRAPESの電卓の利用法以外必要はなく、明示的に上の知識に関与させることはできないであろう。しかし一方で、筆者は、自動描画機能の利用方法によっては、これらの知識に明示的に関与させることができると考える。では、いかに関与させることができるか、「代数計算」と「数値計算」以外の場合についてここで検討しよう。「代数計算」と「数値計算」については、別途検討する。

代数表現 グラフ表現：大局的に GRAPES が自動である関数のグラフ表現を描画することは、表記法の観点からすれば、「代数表現 グラフ表現」の移行を数表記を介さずに行なうことである。さらに、GRAPES はグラフ描画を自動で行なうため、この移行を時間的にも物質的にも非常に素早く手軽に行なう。これは、代数表現とグラフ表現の対応をより多く容易に示すことができ、学習者にとっては経験できることである。つまり、「代数表現 グラフ表現」の移行に関する知識を学習することができる。さらに、代数表現とグラフ表現の対応は、「代数表現 グラフ表現」のみではなく、「グラフ表現 代数表現」の移行にも大きく関わる。そのため、「グラフ表現 代数表現」に関する知識を養うことが可能であろう。

この両者の対応をグラフに関してグローバルに見れば、先ほどの紙と鉛筆を用いたグラフ描画において必要となった「代数表現からグラフの概形の推定」の知識が養われる。例えば、簡単な場合であれば、2次関数がグラフ表現において放物線を描くこと、少し複雑な場合では、 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ の関数が、4乗の項があるからこぶが多くて3つできる、4乗の項の正負によりグラフの開きが上下逆転すること、最後の x を含まない項は切片になること、などである。したがって、グラフの自動描画は、紙と鉛筆を用いたグラフ描画に必要な知識のひとつを学習可能にするのである。この学習は、一般の紙と鉛筆を用いた数学学習においては容易ではない。なぜならば、グラフの概形推定の知識を学習する段階では、ある関数の代数表現からグラフ表現への変換は、手間のかかる数的アプローチを用いる必要があるからである。実際、代数的アプローチは概形推定の知識を必要とするため⁷、数的アプローチしか用いることはできないのである。

代数表現 グラフ表現：局所的に 「代数表現 グラフ表現」の対応をよりローカルに見れば、「代数表現 グラフの特定の点」との学習に関わる。ここで「関わる」としたのは、自動描画で「代数表現とグラフ表現」の対応を示し経験するのみでは、「代数表現 グラフの特定の点」の対応の学習には至らない。実際、GRAPES を用いてある関数の代数表現に対応するグラフ表現を描画し、大局的にグラフを観察するだけでは、ローカルな視点は必ずしも必要ない。そこでは、学習者にローカルな視点を生じさせるなにかしらの働きかけが必要となる。例えば、ローカルな視点が必ず必要となる教師による問題提起が必要となるのである。この活動は、 x 軸との切片の正確な座標を求める活動など、グラフにおいて特定された関数の特徴を代数表現において探究する活動である。より具体的には、グラフ表現において特定された頂点が代数表記において何に対応し、何を意味し(最大、最小等)、いかに表現されるのか、いかにその正確な値を導き出せるのか、 x 軸との切片は代数表現では何に対応し、いかに正確な値を導き出せるか、などである。これらは、グラフと x 軸との切片が $(f^{-1}(0), 0)$ であること、 y 軸では $(0, f(0))$ であること、頂点が $y = a(x - b)^2 + c$ において (b, c) であることなど、グラフ表現と

⁷微分法を利用すれば必ずしも概形推定の知識は必要ない。しかし、グラフ概形推定の知識なく、微分法の学習が可能であろうか。検討を要するであろう。

代数表現の対応として発見されるような活動となるであろう。

これらは、まさに「代数表現におけるグラフの特定の点の抽出」の活動である。そして、この活動では、当然ながら、すでにグラフの概形が描画されている必要がある。この場合、どんな代数式でもすぐさまグラフを表示してくれる GRAPES は学習活動をグラフの探究から可能にするのである。つまり、代数式を変形する以前に、グラフを表示し、「グラフ表現 代数表現」の移行を中心とした探究を可能としてくれるのである。

これらの活動は、当然ながら、グラフ表記においてのみ行なわれるのではなく、代数表記においても様々な活動、式変形などが行なわれる。代数計算なしにはなしえない活動である。一方、代数計算は、常にグラフ表現において特定された対象を代数表現において特定するために行なわれる。明確な目的、見通しをもって代数計算を行なうのである。

「グラフ表現における代表的な点の抽出」の知識は、紙と鉛筆を用いたグラフ描画に必要なものであった。代表的な点はグラフ表現によるものであるため、当然ながらグラフ表現において行なわれる活動である。この際、代数表現からグラフの概形がすでに推定されている必要がある。実際、4次関数にこぶが多くて3つあることを認識せずにグラフ表現において代表的な点を抽出することはできない。一方で、この代表的な点の抽出は、グラフが自動で描画される場合には必要なく、グラフを描画する目的においてのみ必要である。

一方、グラフが自動で描画されてしまうため、数的アプローチで必要であった x と $f(x)$ との対応が座標において点として表現できることには、重点が置かれていない。特に上の「代数表現からグラフの概形の推定」や「グラフ表現における代表的な点の抽出」などは、この対応を前提としているため、数的アプローチ等によって関数が「対応」であることを十分学習した後、扱う必要があるであろう。

3.3.3 代数計算の位置付け

GRAPES は関数の代数表現を自動でグラフ表現に変換してくれる。利用者は、この変換において代数計算を行なう必要はない。では、GRAPES を用いると代数計算の知識が必要なくなり、関数学習とは分離されるのであろうか？

筆者は、GRAPES の自動描画機能の利用方法により異なると考える。確かに、ある関数のグラフ表現を座標上に描画することのみが、学習の目的であれば、代数計算は介入しない。グラフの概形と代数表現との関連の探究が目的の場合も、あまり代数計算は介入してこないであろう。しかし、グラフ表現において、正確に頂点や切片の座標を求める必要があるのであれば、代数計算が必要となってくる。特に、上で分析した「代表的な点に対応する代数表現における値の抽出」においては、代数計算が非常に重要になる。例えば、 x 軸との切片の座標であれば、 $f(x) = 0$ の x の値が切片との x 座標となることを認識するとともに、その計算を行なわなければならない。頂点の座標を求めるためには、さらに平方完成等の計算が必要

となる．この場合、「頂点の座標を求める」ために代数計算を行なうといった，目的意識がより明確な状態で代数計算が行なわれるであろう．

また，その際，「極値を求める 頂点の座標を求める」の対応がより明確に把握されている必要がある．

4 おわりに

本稿では，グラフの自動描画機能に注目し，GRAPES の関数学習への影響を分析した．その際，表記法に注目し，紙と鉛筆を用いた場合のグラフ描画の活動と GRAPES を用いた場合の自動描画の活動をそれぞれに必要となる知識・技能に注目し，分析した．その結果，「代数表現からグラフの概形の推定」の知識など関数のグラフの大局的な側面は，GRAPES の自動描画機能を用いることにより獲得されると考えられたが，局所的な側面は問題を提起する適切な状況が必要であることがわかった．

一方，GRAPES は，グラフの自動描画機能の他に，様々な機能を持つ．今後は，それらの学習に対する影響を詳細に分析していく必要がある．ひとつ例をあげると，筆者は，パラメータと残像の機能は様々な学習の可能性を秘めていると考える．実際，GRAPES では，パラメータ (媒介変数・助数) を含む代数式のグラフを描画し，パラメータを変化させることによってグラフを動的に変化させることができる．さらに，一度描いたグラフの残像を残すことができるため，パラメータの変化と組合せグラフの動的な変化を明瞭に視覚化することができる．GRAPES は，グラフ上では軸を持たないパラメータの役割を表現・視覚化することを可能にするのである．

GRAPES を用いた実践事例

- エルサルバドルでの GRAPES の活用 (牛山 敏章)
- パナマ国ウラカ高校へ数学授業への GRAPES の導入
(杉浦 梨絵)

エルサルバドルでの GRAPES の活用

牛山 敏章

エルサルバドル 14 年度 1 次隊 OV

長野県箕輪工業高等学校 教諭

<自己紹介>

長野県箕輪工業高等学校より青年海外協力隊へ現職参加。14 年度 1 次隊でエルサルバドルへ赴任。現地の国立高校で現地数学教師へのアドバイス、生徒への授業を行う。現在箕輪工業高等学校勤務。

<エルサルバドル勤務校紹介>

私の赴任した高校はエルサルバドル国立アポパ高校とって、首都のサンサルバドルから北に 12 k m ほど行ったところにある首都近郊の街アポパ市にあります。普通科，衛生看護科，経理情報科，秘書科の 4 科からなり，昼間部と夜間部の 2 部制，生徒数は約 1,800 人です。私が赴任中に教室が整備され，パソコン 20 台ほどある生徒用パソコン室や，教員用のパソコン室（4 台）が作られました。

エルサルバドルの高校生の年齢層は日本の高校と同じですが，普通教科は 2 年生まで終わってしまいます。したがって，普通科の生徒は 2 年で卒業，専門科の生徒は 3 年次に実習を含めた専門の勉強をし，3 年で卒業します。

毎年入試倍率が約 5 倍になる人気校で，それを勝ち抜いたしっかりした生徒が入学します。

普通教室の風景



パソコン教室



キャンパス内（全校集会）



<エルサルバドル国立高校での数学のカリキュラム，授業の特徴>

普通教科が2年間で終わることで，日本との大きな違いは微分積分がないことでしょうか。微分積分は大学の範囲です。

高校1年	<ul style="list-style-type: none"> • 数集合（自然数，整数，有理数，無理数，実数，四則演算，不等式，絶対値，集合，部分集合，積集合，和集合，補集合，要素の数） • 方程式，不等式（式の計算，展開，因数分解，一元一次方程式・不等式，二次方程式・不等式，二元一次・三元一次方程式） • 関数（座標，直積，一次関数，二次関数，判別式，逆関数，有理関数，無理関数，指数関数，対数関数） • 数列（等差，等比，級数の和，応用（利子の計算））
高校2年	<ul style="list-style-type: none"> • 確率（順列，組み合わせ，確率の計算，確率分布） • 幾何（角度（度・分・秒）ラジアン，三角形の合同，相似比を使った辺の長さの計算，図形の面積） • 三角比・三角関数（\sin, \cos, \tan, \csc, \sec, \cot, 特殊角（30°, 45°, 60°）における三角比，関数電卓の使い方，正弦定理，余弦定理，グラフ） • 解析幾何の基礎（xy 平面上の2点間の距離，直線の傾き，2点を通る直線の式，2次曲線（円，放物線））

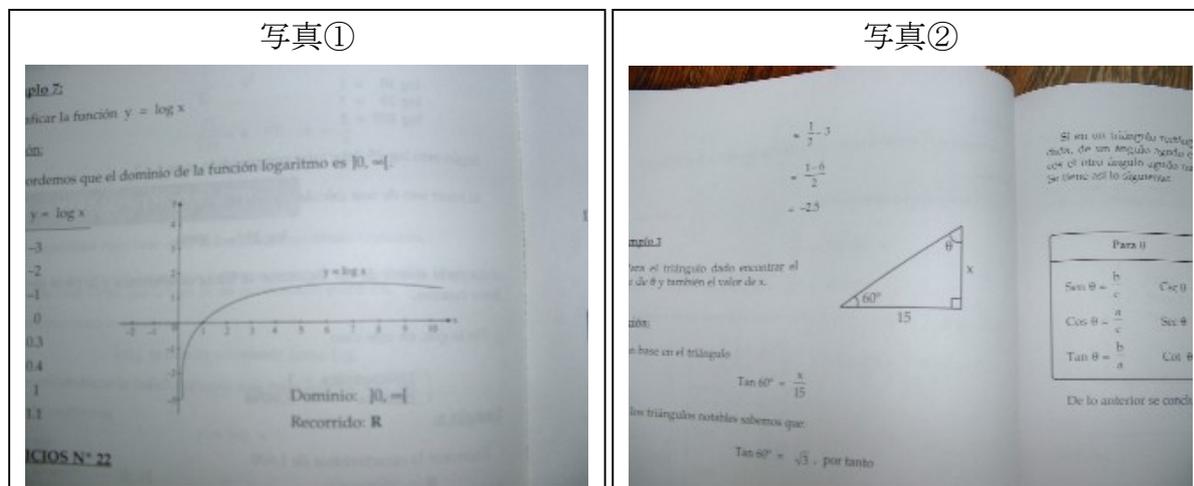
ひとクラスは約50人で，授業時間は90分。講義形式の授業がほとんどです。定義から始まって，定理の説明→例題解説→問題演習→問題解説の順に進むのがアポパ高校での一般的な数学の授業の流れです。問題を解くことに主眼を置いているので，数学的な意味はあまり重要視していないように思います。そのため学問的な深み，面白みに欠ける印象があります。しかしアポパ高校の先生達はどの先生も非常に熱心に授業しており，初めて授業見学したときから良い印象を持っていました。職員会などを見ても運営がしっかりしていることが伝わってきますし，職員集団の意識は想像よりずっと高いです。したがって授業に関しては，悪いところを直すという方針ではなく，生徒がより興味を持つような数学の話題などを加えていく方が有効だろうと考えました。生徒達は素直で，学習意欲が旺盛です。飽きっぽい部分もありますが，日本の高校生にもそういう子はいますし，エルサルバドルだからということはないと思います。

<GRAPESを導入するに至った経緯>

1. 現地で使っていた教科書に載っているグラフが不正確，また何となく形がおかしいものが多かったこと。

教科書を写真で撮ったものなので見づらいかもかもしれませんが，写真①は対数関数のグラフ。単調増加のはずが， x 軸に近づいていっています。写真②は三角形の一つの角が 60° と書いてあるのですが，図の角は 60° には見えません。

教科書以外では正確なグラフを見るチャンスがなかなかないのに、これでは生徒が正確なグラフを見ないまま学習することになってしまいます。また生徒達に数学のグラフの美しさを知って欲しいという思いもあり、正確なグラフを見せるツールとして GRAPES を授業で使ったら、と考えました。



- 教科書の内容をスクリーンに投影し、それを見ながら授業を行うスタイルを導入しようとしたこと。

エルサルバドルでも数学が苦手な生徒が多く、“いかに数学を楽しんでもらえるようにするか”ということが、現地の先生と私との共通課題でした。そこで考えたのが、問題解説の補助として図形やグラフを投影し、解説に沿ってアニメーション風に図が展開していく教材を作ることでした。最終目標として現地教員が自力でそのような教材を作れるようになることを考えたので、作成があまり難しくないように Microsoft PowerPoint に GRAPES で作ったグラフや、図を貼り付けて作ることにしました。(添付資料：例.ppt)

授業は教科書をもとに進められますが、教科書のない生徒が多くいました。そこで、スクリーンに映された内容が教科書代わりになることも狙いました。PowerPoint で作った教材だけでなく、GRAPES そのものもグラフ描画ツールとして使うようし、授業者がグラフを板書する手間を省きつつ、正確なグラフを生徒に見せることを考えました。

<実際に使ってみて>

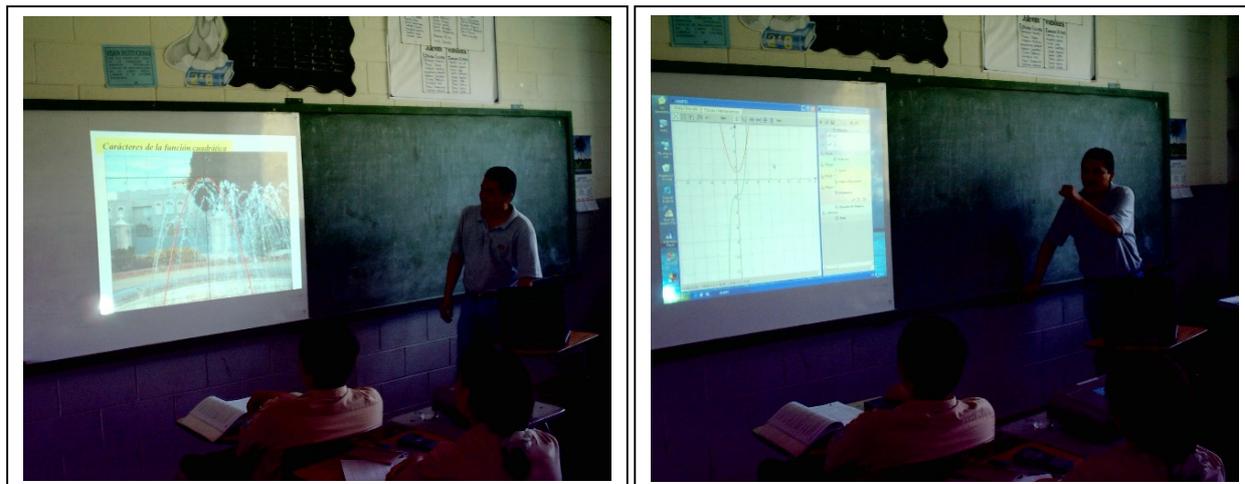
現地高校では教室が整備されパソコン教室が設置されたことで、先生、生徒いずれもコンピューターに興味を持ち始めていました。そのような時期にこのようなソフト、教材を提案したので、かなり好意的に受け入れてもらえたと思います。実際にカウンターパートの先生には積極的に授業で使ってもらいながら、授業でどのように生かせるのか、生徒の反応を確かめながら考えていきました。授業内容、分野にもよりますが、例.ppt にあるように実際に実生活にある題材を使うことは、生徒に興味を持たせ

ることに非常に有効で、実際生徒の反応も良かったです。

また GRAPES そのものを、実際にグラフを板書する代わりに使うことも先生達に好評で、グラフの板書の手間が省け、かつ正確なグラフを生徒に見せることができるので、非常に実践的であると感想を述べていました。数学の授業といえば紙と鉛筆、黒板でやるもの、というイメージが現地の人の間にもあったので、このようなパソコンでイメージを投影するという試みは、予想外だったようで、驚きを持って受け入れられたと思います。

<問題点と工夫した点>

一番の問題点は、高価な設備が必要ということだと思います。生徒が自分で GRAPES に触れるためには、それなりの台数のパソコンが必要になります。また、普通教室で使うためにはノートパソコンとプロジェクター、スクリーンが必要です。幸いアポパ高校にはノートパソコンとプロジェクターがあったので、実現することができました。しかしそれでは複数の先生に利用してもらうことが難しかったため、JICA の隊員支援経費を利用して、プロジェクターを買いました。スクリーンに関しては、アポパ高校にも移動可能なスクリーンがありましたが、持ち運びが大変なため、教室のホワイトボードを利用し、そこに直接投影することにしました。



日本の学校の授業でも問題になるのですが、パソコンを教室に持ち込んでプロジェクターを設置するのはかなり面倒なことです。しかしアポパ高校は90分授業で20分の休み時間があり、時間的な余裕があったことと、先生が生徒に指示して機材の搬入から設置までをやらせていた（生徒が実に良く動きます！）ため、機材セットの手間はあまり問題にならなかったです。

このような視覚に訴える教材は先生、生徒どちらにもとても斬新だったようで評判は良かったのですが、現地の人“新しいもの好き”の面に受けていた部分もあると思います。今後より浸透し、使い続けてもらうためには、授業にフィットした実践的な使い方を提案し続けることが必要だと思います。

<今後の展開>

GRAPES の使い方には大きく分けて二つのパターンがあると思います。

- ①既存のパターンの授業の補助，もしくは幅を広げるため
- ②GRAPES の機能を積極的に活用した，新しいパターンの授業展開のため

私のエルサルバドルでの GRAPES の利用法は前者の方です。当時も GRAPES の利用についていろんな可能性があったのですが，スペイン語版の訳が終わる頃に任期がほとんど終わっていたので，有効な使い方を追求するところまで行きませんでした。

今でもカウンターパートとはメールでコンタクトを取っています。私がいた当時は，パソコン教室がひとつで，約 20 台のパソコンがありました。その後 APREMAT という EU（欧州連合）がバックアップしているエルサルバドルの教育組織からパソコンの援助があり，今ではパソコン教室が 3 つに増え，パソコンの台数も約 60 台になっています。インターネットの常時接続の環境もあるようです。パソコンの設備面ではもう日本の一般的な公立高校を超えているかもしれません。カウンターパートの話ではそのパソコン教室を利用した数学の授業を考えているということで，生徒が実際にパソコンで GRAPES に触れながら授業ができる可能性が出てきました。

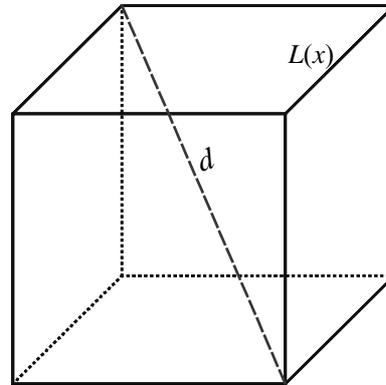
将来的には学校のホームページに宿題などの問題を掲載し，生徒がそこからダウンロードして宿題をやり，メールで先生に宿題を提出する，というようなシステムを考えているようです。まだ具体的に動き出したわけではないので，そのアイデアがいつ実現するのかわかりませんが，カウンターパートからは「GRAPES や PowerPoint を使って作った，三角関数や指数・対数関数などの解析分野の，練習問題のファイルのストック作りに協力して欲しい」と依頼を受けています。

先にも書いたように，任期中には GRAPES を活用する十分な時間がなかったもので，全てはこれから，という感じです。アポパ高校の設備的な条件が整いつつある今，GRAPES の機能をより積極的に使った授業展開ができるのではないかと考えており，授業案をストックしていくことが今の課題です。アポパ高校には後任がないので，日本から少しずつメールでやり取りしながら協力していくつもりです。

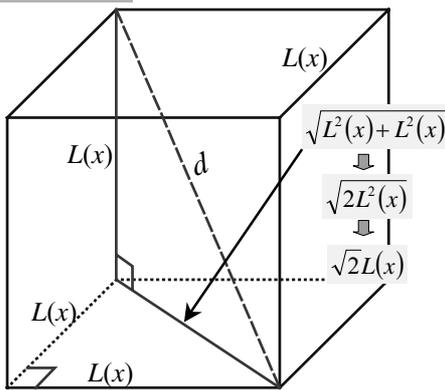
Ejercicio 7

Expresa la longitud $L(d)$ de la arista de un cubo como función de la longitud de la diagonal. Después expresa el área de la superficie, $A(d)$ y el volumen del cubo, $V(d)$ como función de la longitud de la diagonal.

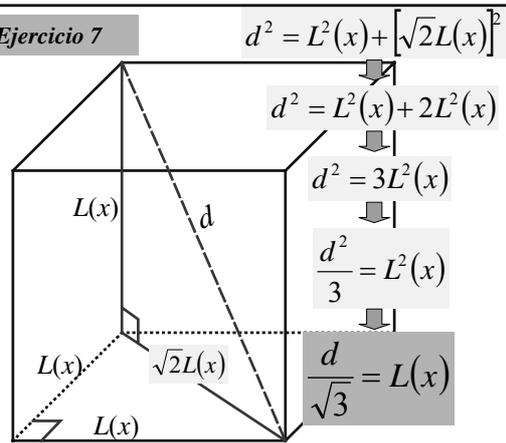
Ejercicio 7



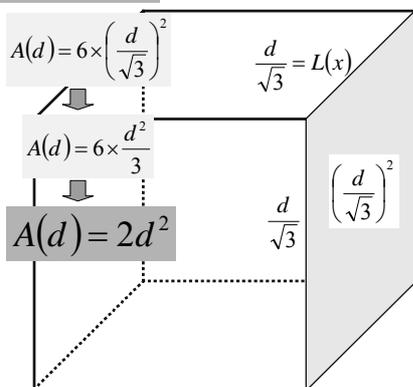
Ejercicio 7



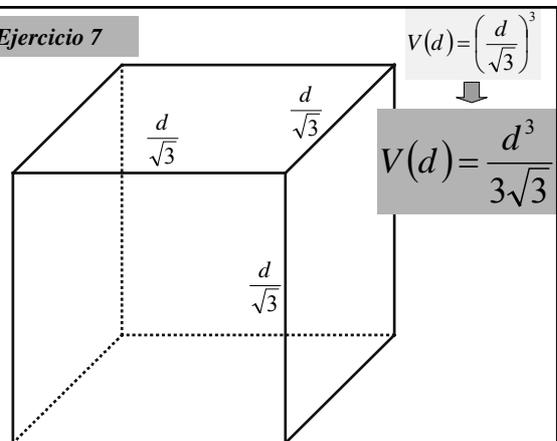
Ejercicio 7



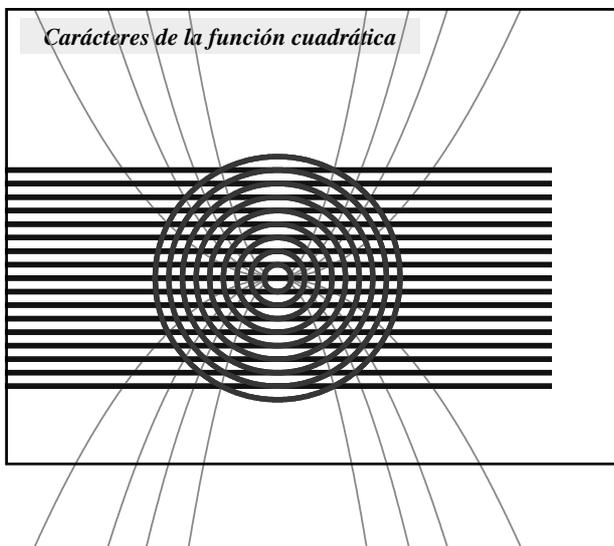
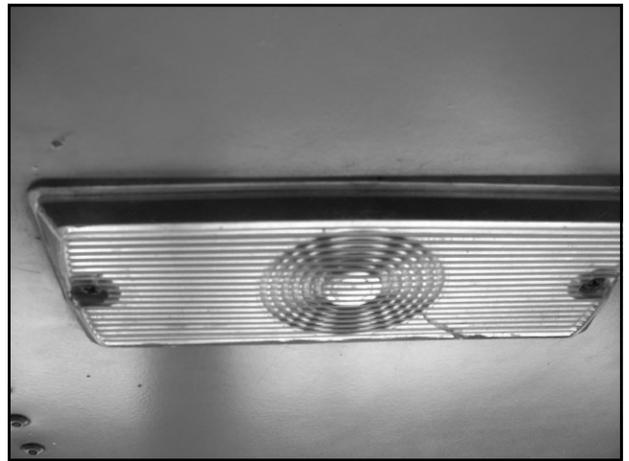
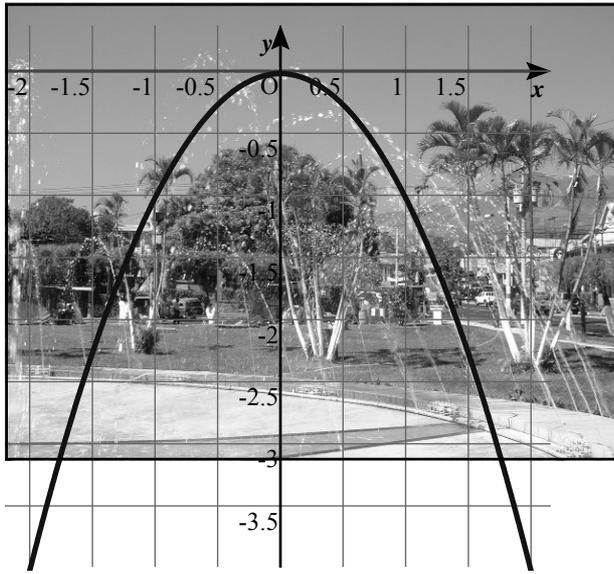
Ejercicio 7



Ejercicio 7



<資料>



パナマ国ウラカ高校へ数学授業への GRAPES の導入

杉浦 梨絵

パナマ 14 年度 1 次隊 OV

筑波大学教育開発国際協力研究センター 技術補佐員

1. はじめに

パナマのウラカ高校には教育系の青年海外協力隊員が約 10 年前から派遣されている。目的はパナマの中高の物理化学教育の改善が始まりで、物理（化学）教師が 5 代続いている。その物理（化学）教師の報告により、算数・数学教育改善が訴えられた。そして数学教師が要請され 2000 年に初めて派遣された。近年のパナマでの国際教育協力は、初等算数教育の改善が中心に変わりつつある。

筆者は、パナマにおける算数・数学教育改善の一環で、2002 年に青年海外協力隊平成 14 年度 1 次隊の数学教師としてパナマに派遣された。本稿は、筆者がカウンターパートと共にパナマ・ウラカ高校で行なった学校初のコンピュータを用いた数学授業の実践報告である。ソフトウェアには GRAPES を用いた。

2. GRAPES を用いた授業の背景

ここでは、国際教育協力の文脈で、GRAPES を用いた数学授業にいかに至ったか示す。筆者の場合、カウンターパートにソフトウェア GRAPES を単に提示し利用してもらったのではなく、パナマの全国の教員対象の数学教育セミナーで GRAPES を紹介し、一定の評価を受けたことによって導入に至った。以下、その背景を「筆者とカウンターパートの紹介」と「数学教育セミナー」に分けて示す。

2.1 筆者とカウンターパートの紹介

筆者のカウンターパートは、筆者が派遣される前から暗記型の教育と生徒の数学嫌いに不満を持っていた。一方、われわれが紹介する日本の教具などに非常に関心を示していた。彼女は、筆者の滞在中の 2 年間、これまでの自らの教師経験をうまく発展させる形で、多くの日本の教育法をパナマ流にうまく自分の授業に導入していった。

以下、筆者とカウンターパートの情報を掲載しておく。GRAPES の導入がいかなる人的背景において行なわれたかわかるであろう。

氏名	杉浦 梨絵 (女性)	ディルサ・ダマリス・デ・クビージャ (女性)
職業	元青年海外協力隊平成 14 年度 1 次隊数学教師	高校数学教師
仕事場	パナマ国教育省より中南米パナマ共和国ベラグアス県サンチアゴ市 公立ウラカ高校に派遣	公立ウラカ高校数学部 午前の部高校 2 年生 4 クラス担当
活動期間	2002 年 7 月から 2004 年 7 月まで	勤続 29 年
要請内容	数学教員 15 名への数学アドバイザーとして暗記型の数学教育の改善とコンピューターを用いた数学教育法の指導	
活動内容	<ul style="list-style-type: none"> ・ 2003 年夏休み中の JICA&教育省主催の全国理数科教師セミナーにおいて簡単な日常にある数学の面白さを紹介 ・ 学期中は授業見学しその都度教師に要求されたものを紹介、指導、実際に教師の授業へ導入 ・ 次に記すセミナーのための準備 ・ 2004 年夏休み中には、現場の同僚教員を主催側に巻き込みかつ数学分野で初の JICA&教育省主催の全国数学教育セミナーを開催（数学教育の面白い教具、教材、コンピューターを使った教育法を紹介） ・ 同僚数学教師（セミナー不参加の）への GRAPES の研修会 ・ 同僚数学教師の授業へ教具を用いた授業の導入（GRAPES を用いた授業はここで行なった） ・ 来年度セミナーの計画 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 教具などを使った授業に興味をもち、実際に自分のクラスに導入 ・ 2004 年セミナーの主任として準備 ・ 隊員と同僚 4 名と共に 2004 年セミナー開催 ・ 同僚数学教師への GRAPES 研修会に講師として参加 ・ 様々な教具を使った授業や今回の GRAPES 授業を自分のクラスに導入 ・ 来年度セミナーの計画

2.2 数学教育セミナー

コンピューターを用いた数学教育は日本を始めヨーロッパやアメリカなど各国で行なわれ始めている。近年パナマでもコンピューターが教育に参入してきた。そこで数学分野では初の全国教員対象の数学教育セミナーを、2004 年 2 月に全国 3 箇所（チリキ県ダビッド市、ベラグアス県サンチアゴ市、パナマ県パナマ市）各 5 日間ずつ JICA とパナマ教育省中等教育局の共同で行なった。セミナーの内容は、日本で用いられている様々な教具を使った数学教育の紹介 4 日半、最終日に視聴覚教育からみた教育の様々な方法の利用や日本文化紹介などであった。

教具を用いた数学教育の 1 例で、日本では比較的現場で利用されているフリーウェアの関数グラフ描画ソフト GRAPES をセミナーの 1 日半を利用して紹介した。GRAPES は大阪教育大学附属高等学校池田校舎の友田勝久氏が開発したものである。友田氏と共同でスペイン語化し、セミナーに利用した。セミナーでは教師達の大半が非常に気に入った様子であった。中には「いくつか英語版のグラフソフトがあったが、

こんなに操作が簡単で見やすいものは初めてだ！」と非常に肯定的な意見も出た。そしてセミナー後、ウラカ高校数学部にも導入してみることにしたのである。

3. GRAPES を用いた授業実践の報告

GRAPES を用いた授業の概要を以下の表に示した。GRAPES を三角関数のグラフの学習単元に用いたのである。

単元：	三角関数のグラフ
授業時間：	40 分
場所：	会議室
クラス：	高校 2 年生 4 クラス (1 クラス 40 名)
教材：	GRAPES を使った例
機材：	PC, プロジェクター
授業者：	ダマリス先生 (補助：杉浦)

以下、まず、準備として、授業の場所が会議室になった背景を示した「授業環境」、本時の位置づけを示す「前回の授業」を報告し、そして「GRAPES を用いた授業実践」にて授業の進行と生徒の反応、工夫点などを述べる。

3.1 授業環境

パナマ・ウラカ高校では、パソコンの使用目的が数学教育とは違うものの情報科の授業やタイピングの授業で使われるものが数十台設置されている。しかし、大半のものは型が古いものやハードディスクの空き容量が少ないもの、CD ドライブすら開かないものなどであった。そのため 1 クラスの生徒数の 3 分の 1 しか GRAPES を利用できるコンピュータを割り当てられない状態であった。そこで生徒個人でコンピュータを用いた活動は難しいと考え、学校にあるノートパソコンとプロジェクターを用いて、各教室へ教師が移動してホワイトボードに映しての授業を行なうことを考えた。しかし以下の 2 つの主な理由によりその案も却下された。各教室はコンクリートでできていて窓ガラスでなく網がはってある程度の熱帯地域によくある環境の教室で簡単には暗くできない事、休憩時間のない 40 分という短い時間のために各教室に移動し設置するのに時間がかかる事。

結局、妥協案として学校にある大会議室を使い、生徒に移動してもらおうという案に行き着いた。机はパソコンとプロジェクターを使うくらいの数しかなく、生徒はパイプ椅子に座って授業を受けることになった。

3.2 前回の授業

GRAPES を用いた授業の前回の授業は、三角関数の導入にあたるグラフの作成とそ

の特徴の考察を目的としていた。その活動内容は、以下の配付資料で与えられた問いを、3人1組で解答することであった。パナマの数学教育では、子どもたちが共同で活動することが多い。具体的には、電卓を用いて、正弦と余弦の関数に角の値を入力し、対応する値を求め、表に記入し、グラフを描き、特徴を観察する共同作業であった。これは、三角関数の導入では、よく行なわれるものであり、三角関数を「代数表現→数値表現（表）→グラフ表現」と表記法の変換を行ない、それぞれの特徴や関係を探ることを目的とするものである。

以下、配付資料のオリジナルとその日本語訳を添付する。

CONSTRUYE LA GRÁFICA:

- 1- Completa la tabla de valores. (en este caso les damos los valores)
- 2- Localiza los puntos en el plano.
- 3- Traza la gráfica.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\text{sen}\theta$																	



GUIÁNDOTE POR LA GRÁFICA, RESPONDE:

1. ¿Cuál sería la amplitud de la curva según el cuadrante?
2. ¿Cuáles son las coordenadas del punto más alto de la curva?
3. ¿Cuáles son las coordenadas del punto más bajo de la curva?
4. ¿Qué sucede si le damos a θ valores mayores de 360° o menores de 0° ?

グラフを作成しなさい：

- 1- 次の表を埋めましょう（小数第2位まで求めなさい）。
- 2- それらの点を平面座標上に打ちましょう。
- 3- グラフを描きましょう。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\text{sin}\theta$																	



グラフを見ながら以下の問いに答えましょう：

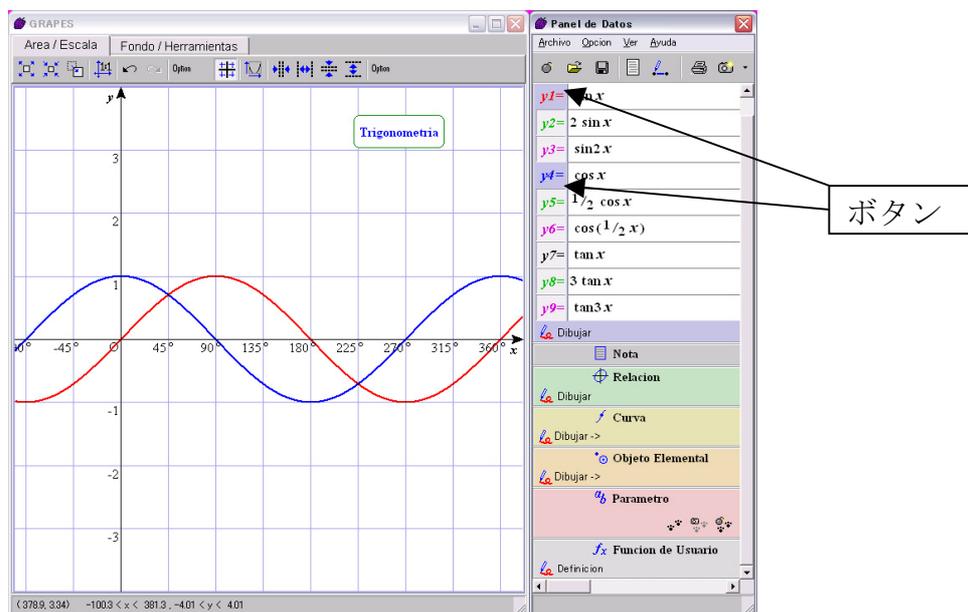
1. 各象限において曲線の振幅を求めましょう。
2. 曲線の最大値を取る座標を求めましょう。
3. 曲線の最小値を取る座標を求めましょう。
4. 偏角が 0° 以下、または 360° 以上ではどのようなになるでしょうか。

3.3 GRAPES を用いた授業実践

以下、まず準備と授業の進行に沿って、GRAPES を用いた実践授業を報告する。その後、授業の工夫点と反省点を挙げる。

0. 準備として事前に以下のような画面を GRAPES で作成

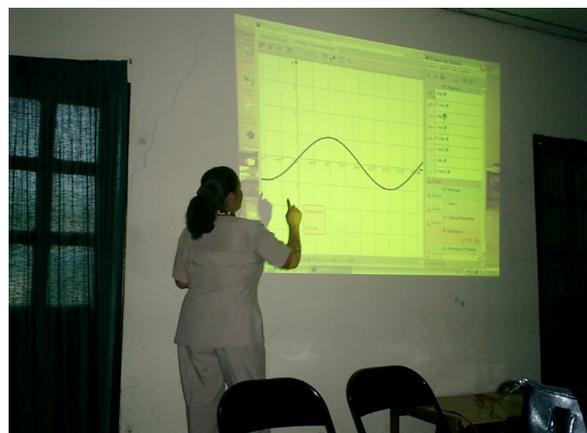
$y=\sin x$, $y=\cos x$ やその他の代数式をそれぞれ入力し、事前にグラフを作成しておく。GRAPES では、ボタンを押すことによりグラフを表示したり隠すことができるため、授業の最初に必要なグラフ以外は隠しておく。下図は、実際の授業で準備しておいた GRAPES の画面である。



1. 前回の授業の復習

教師が前回課題にしたグラフの解答をプロジェクターで GRAPES を用いて壁に表示する。各グループで作成したグラフを教師が（GRAPES の各関数のボタンの押し消しにより）表示した解答と同じか否か照らし合わせてみる。その後、前回最後に与えられた問題の解答をグラフを見ながら教師の問いかけと生徒の発言により解答を確認する。（約 15 分）

右の写真は、大会議室における授業で、カウンターパートのダマリス先生が前回の問題を説明している場面である。先生が正弦と余弦の周期や最大値・最小値などを生徒に質問し、生徒が回答している。



2. 三角関数のグラフの特徴

次に、生徒7,8人をひとグループとして活動を進める。ここでは、三角関数（正弦・余弦・正接）のグラフの特徴、特に係数を変えた場合や角度を倍角・半角にした場合に元のグラフと比べたグラフの特徴を、まず生徒がグループで考え、予想する。そして、教師が GRAPES を用いて予想した代数式のグラフを表示する（約10分）。

具体的には、次のような会話のやり取りがなされた。

（教師）「じゃあ、 $y = \sin$ の関数の前に2が付いたらどうなると思う？」

（生徒）「横幅が狭くなる！」

また、予想させて実際に表示すると、そのつど歓声があがり、生徒たちは少々興奮気味であった。この際、代数表現からグラフ表現へ直接の変換を行っており、生徒たちは、数表現（表）を介さずグラフ表現を予想しているのである。



3. さまざまな三角関数の代数式

最後に、各グループに自ら適当な三角関数を使った代数式を作るように提案し、実際にそれぞれのグループが PC に代数式を入力させ、描画されるグラフを探求した。（約10分）

右の写真は、7,8人のグループで、どのような三角関数の代数式を GRAPES に入力するか話し合っているところである。その際、表示されるであろうグラフを予想しながら話し合っていた。

グループで決めた代数式を、先生から GRAPES の使い方を教えてもらいながら代表の生徒が実際に入力し表示した。右下の写真は、生徒が代数式を入力しているところである。

表示された関数のグラフは、ぐにゃぐにゃに曲がったものから、軸に隠れてしまうものまでさまざまな関数であった。ここでは、



三角関数の局所的な側面にはほとんど触れず、大局的な“面白さ”を目で見えて楽しむようにした。これは、パナマの公立高校では、上の活動1と2のみカリキュラムで扱われるためである。しかも、活動2でさえ、通常は簡単に触れる程度である(時間と他の内容の量の問題により)。活動3は大学の数学の領域である。

右の写真は、表示されたグラフをグループで観察しているところである。



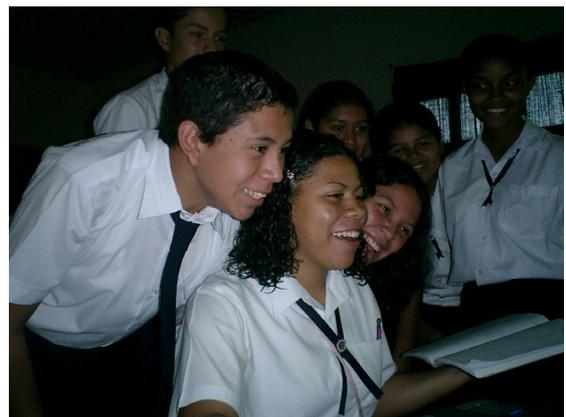
○ 授業の工夫点

本授業においては、以下の点を工夫した。

- ・ 授業の後半において観察と考察のみであったため、生徒が退屈になる可能性があった。そこで、コンピュータに触らせ GRAPES を使わせ、生徒の関心が持続するように工夫した。実際にグループの代表者だけであったが。
- ・ 授業がスムーズに進むように、あらかじめ GRAPES を使って、表示するグラフを作成しておいた。
- ・ 時間の関係で深く勉強できない課題や、大学のカリキュラムに入っている課題も、この GRAPES を使って簡単に触れることができるので、それらを用いて生徒の興味・関心を引き出すよう試みた。

○ 生徒の様子 写真参照

生徒たちは情報科の授業でコンピュータを使ったことはあったものの、数学授業においてコンピュータを活用することは、初めてであった。さらに、式を入力するだけでグラフが表示されること自体も生徒にとって驚きであったようだ。本授業において、生徒の反応は非常に良かった。みな楽しそうで、代表者しか GRAPES を使えないことにとっても残念そうだった。生徒の反応は以下のものであった。



- ・ グラフが表示されるたびに「おー!!!すごーい!」という喚声があがっており、今まで見たことのないものを見るかのように画面を見ていた。
- ・ 授業後、何人もの生徒が、「またああいう授業がしたい!」、「今度はどんな授業で GRAPES 使うの?」、「どうやったら GRAPES 手に入るの?」、「毎回こんな授業なら数学を好きになるのに」など教師に話しかけていた。

○ 反省点

本授業においては、以下の反省点があった。

- ・ コンピュータが1台しかなく、さらにグループ活動だったため、活動に参加しない生徒が出てきた。授業前から配慮していたものの、それでも退屈そうな生徒がでてしまった。最低生徒2人に1台程度のコンピュータが必要だと実感した。
- ・ なかなか使用許可の下りない部屋が急に使えることになったので、事前準備が十分できなかった。そのため、教材のプリントも作れなかった。パナマではそれが普通のことではあるが、その日考察したことなどをきちんと整理できるようなものを配付、あるいはホワイトボードに板書するべきだった。
- ・ パナマのカリキュラムの関係で深く扱うことができないものが多くあった。そのため、授業の後半は関数のグラフ表現における大局的な側面しか扱えなかった。前半にもう少し三角関数の局所的な側面など、深く扱えればより良かったであろう。

3. おわりに

今までパナマにはこのようなフリーソフトはなく、存在していたとしても生徒や教師にはとても難解な操作が必要なものであったり、他言語であったり無料配布できるものではなかった。2004年2月にウラカ高校だけでなくパナマ全国3箇所でこのソフトの利用方法の研修を数学教師に向けて行なった。そこで多くの先生方が「こんなにシンプルで、使いやすいもので、かつスペイン語である、そういったものがあるとは思わなかった」と非常に肯定的な反応が返ってきた。コンピュータ環境の問題もあり、まだまだ日本のように発展的な授業ができるわけではない。しかし、このGRAPESを用いた実践事例が同じような環境下にいる多くの先生方のきっかけになり、GRAPESを数学授業に導入してもらえればと考える。そしてその国に合ったいろんな方法やアイデアを協働して出し合い授業研究を深めていきたい。



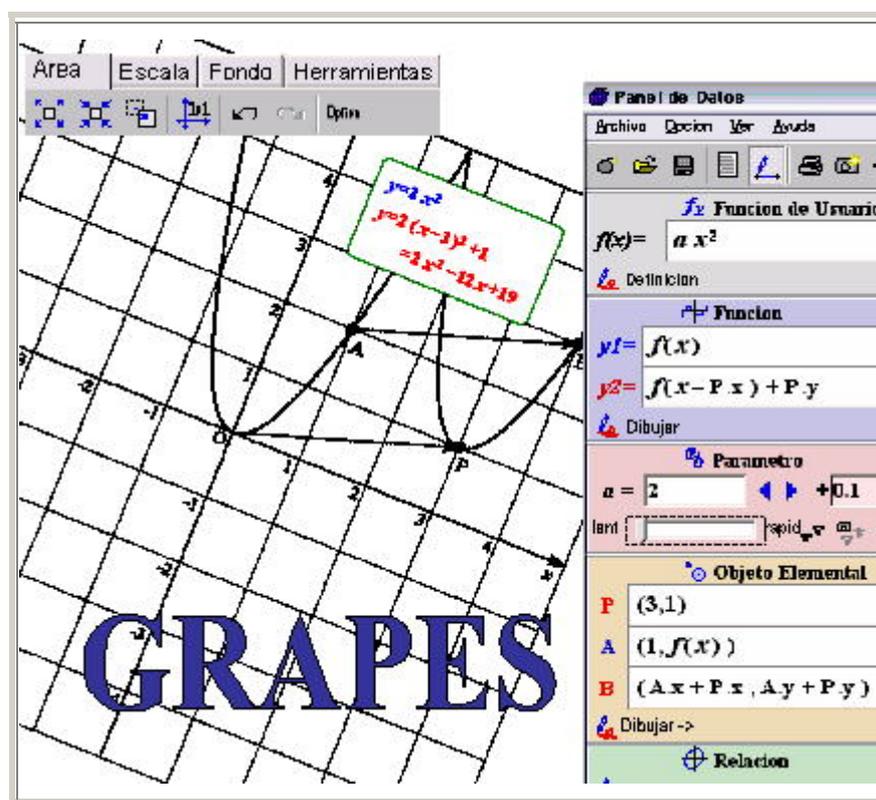
GRAPES ユーザーズマニュアル
スペイン語版

Manual para usuarios/rias del GRAPES

Versión Español

Traductor: Toshiaki Ushiyama Revisión: Prof. Elis A. Quintanilla

Versión original en japonés: Katsuhisa Tomoda



El GRAPES funciona en Windows 95/98/Me/NT/2000/XP.

Junio 2004: Primera Edición para ver. 6.21b

ÍNDICE

INICIO	51
CARACTERÍSTICA PRINCIPAL	52
APARIENCIA DEL GRAPES	54
VENTANA DE GRÁFICA	54
PANEL DE DATOS	55
BARRA DE MENÚ	56
CALCULADORA CIENTÍFICA	58
DIBUJAR.....	60
DIGITAR Y MODIFICAR FUNCIÓN.....	60
DIGITAR Y MODIFICAR RELACIÓN.....	61
ÁREA DE DESIGUALDAD.....	63
GRÁFICA PARAMÉTRICA.....	64
GRÁFICA DE ECUACIÓN POLAR.....	66
DIGITAR Y MODIFICAR OBJETOS ELEMENTALES.....	67
DIBUJAR LÍNEAS Y POLÍGONOS.....	70
FUNCIÓN DE USUARIO.....	71
TRATAMIENTO DE VECTOR Y PUNTO	72
MOVER	74
PARÁMETRO	74
HACER DRAG PUNTOS.....	76
IMAGEN ANTERIOR	76
PANEL DE CONTROL	78
TABLA DE [ÁREA]	78
DETERMINAR DISEÑO DE ESCALA.....	80
PEGAMOS IMAGEN EN EL FONDO DE LA VENTANA DE GRÁFICA.....	82
TABLA DE [HERRAMIENTAS]	82
VENTANA DE INTEGRAL DEFINIDA.....	83
INDICAR COORDENADAS Y EXPRESIÓN.....	85
MARCADOR.....	86
PARA PRESENTACIÓN.....	87
BOTÓN DE INDICACIÓN	87
NOTA	87
LABEL	89

FUNCIONES COMPLEMENTARIAS.....	90
IMPRIMIR [ARCHIVO IMPRIMIR], (EL BOTÓN).....	90
COPIAR IMAGEN, (EL BOTÓN)	90
GUARDAR IMÁGENES (CON CONTINUIDAD).....	91
PROYECTO	92
REINICIAR PROYECTO [ARCHIVO REINICIAR] (EL BOTÓN).....	92
CAMBIAR LA CONDICIÓN INICIAL	92
MANEJO DE ARCHIVO [ARCHIVO ABRIR, GUARDAR].....	92
RELACIONAR ARCHIVO	93
DRAG Y DROP DE ARCHIVO	93
FUNCIONES CONVENIENTES	94
INTERRUPCIÓN DE GRAFICAR	94
MENÚ CONTEXTUAL	94
DIBUJAR PUNTOS CON RATÓN.....	94
AMPLIAR ÁREA DE GRÁFICA	95
LIMITACIÓN DE DOMINIO	95
FORMA DE DIGITAR EXPRESIONES	97
ELEMENTOS DE EXPRESIÓN	97
GRAMÁTICA	101
EJEMPLOS	105
PROGRAMACIÓN	108
SOBRE LA PROGRAMACIÓN DE PROYECTO.....	108
LA GRAMÁTICA DE LA PROGRAMACIÓN	108
LEER LOS PROGRAMAS	112
COMPLEMENTO.....	113
FAQ	113
SOBRE DERIVADA	118
SOBRE INTEGRAL INDEFINIDA	118
SOBRE INTEGRAL DEFINIDA	118
EPÍLOGO.....	119
CÓMO DESINSTALAR EL GRAPES	119
OBLIGACIÓN DE USUARIOS Y USUARIAS	119
CONDICIÓN PARA REPARTIR	119
DERECHOS DE AUTOR	119

Inicio

¿Cómo dibujan ustedes las gráficas de función?

- 1. Primero sacar unos puntos, luego dibujar una gráfica trazando los puntos.**
- 2. Dibujar gráfica utilizando la derivada.**
- 3. Trasladar una gráfica que ya graficaron.**

Aunque puedan existir otras maneras de graficar, la mayoría es uno de los tres de arriba. Pero estas tres maneras de graficar no son tan perfectas por estas razones como los siguientes "no se puede graficar exactamente", "se necesita conocimiento avanzado", "no se puede aplicar generalmente" etc.... Pero ya que está bastante difundida la computadora, debe poder existir una manera moderna más fácil. Bueno ahora les presento a ustedes la cuarta manera de graficar.

4. Graficar utilizando el GRAPES con computadora.

Si usamos el GRAPES (GRAph Presentation y Experiment System = el Sistema de Experimentación y Presentación de GRÁfica), podemos graficar las gráficas de las funciones del nivel de bachillerato muy fácil al momento. Y también podemos investigar las gráficas desde varios ángulos. Es posible que haya persona que se resista a poder graficar sin razón. Pero lleva muchas ventajas poder ver gráficas en un instante. En primer lugar...

1. Cuando resolvamos algún problema, podemos conjeturar por ver gráfica.

Se ve que es una manera superficial esta manera, pero nos sirve bastante cuando intentemos resolver un problema difícil. Y en segundo lugar, es una cosa muy importante que ...

2. Podemos conocer sustancia de función.

Además, se puede graficar sin conocimientos matemáticos. Por eso nosotros, todos / das ...

3. Podemos gozar de las gráficas de funciones.

Es muy excelente gozar de las gráficas de funciones matemáticas, ¿no? ¡Ojalá que tengan mucho interés en matemática por utilizar el GRAPES!

[Katsuhisa Tomoda, autor del GRAPES]

Característica principal

El GRAPES es un software que puede dibujar las gráficas siguientes (funciones, relaciones, funciones de parámetro y ecuación polar) en la pantalla de computadora y sirve para averiguar las gráficas desde varios ángulos. El GRAPES tiene las características siguientes.

- Puede dibujar gráficas de funciones, gráfica de relaciones, gráfica de parámetro, gráfica de ecuación polar, área que expresa desigualdad, círculo, punto, línea horizontal, línea vertical, segmento, línea de flecha, polígono etc.
- Puede tratar puntos y vectores sin descomponer a los elementos de ellos. Y también puede calcular sobre vector como el producto interior vectorial, y multiplicación escalar.
- Podemos mover todas las figuras al usar parámetro. Y cuando se muevan las figuras, el GRAPES puede dibujar lugar geométrico e imagen anterior.
- Podemos hacer drag en los puntos en el área de gráfica. Al usar esta función, podemos mover las gráficas con el ratón.
- Podemos controlar parámetros e imágenes anteriores con programa (la programación de proyecto). Podemos hacerle al GRAPES dibujar lugares geométricos y procesar los manejos del GRAPES automáticamente con repetición.
- El GRAPES puede indicar letras, expresiones, valores de expresiones en pantalla al mismo tiempo.
- Cuando digitemos expresiones, podemos digitar los símbolos de exponente, raíz cuadrada y raíz cúbica fácilmente al utilizar la calculadora científica.
- Podemos usar casi todas las funciones que aprenden los estudiantes de las escuelas secundarias superiores de Japón combinándolas.

- $x^\alpha, \sqrt{\quad}, \sqrt[3]{\quad}, |x|, e^x, \log, \log_a, \sin, \cos, \tan, \sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$

- $n!, {}_n C_r, [x]$, Parte de número entero de un número, Parte de número decimal de un número

- Cuatro operaciones fundamentales, Potencia, Operaciones comparativas, Operaciones lógicas
- Derivada, Segunda derivada
- Integral indefinida de función polinomial
- Suma de serie
- Integral definida
- Podemos utilizar varias funciones especiales para averiguar gráficas y lugares geométricos
 - Función de (n) grado que pasa (n+1) puntos dados
 - Función que encuentra el coeficiente de (n) grado de una expresión polinomial

- Podemos utilizar varias funciones para averiguar las características de figuras como las siguientes.
 - Función que encuentra la distancia entre dos puntos
 - Función que encuentra la medida de ángulo
 - Función que encuentra el valor de determinante
 - Funciones que encuentran los puntos especiales de un triángulo, que son circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro
 - Función que encuentra el punto de intersección de dos líneas rectas
 - Función que encuentra el punto de intersección de una línea y su perpendicular que pasa un punto dado.

- Podemos digitar las funciones como las escribimos siempre.

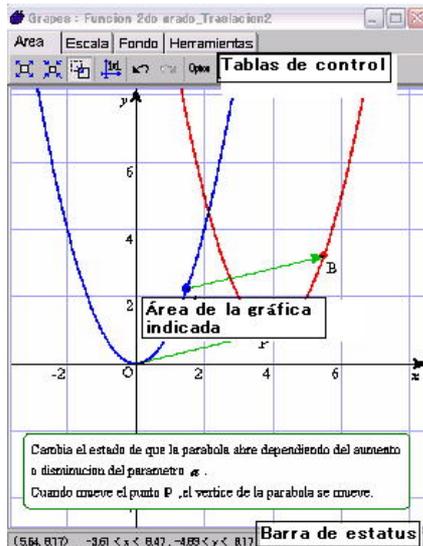
Ej. : $3x^2+5x-6$, $\sin 3x$, $\sin^2 x$

- Podemos cambiar los valores de ampliación, reducción y traslado, y podemos cambiar el tamaño de indicación libremente y a cualquier momento.
- Podemos utilizar herramientas para investigar las funciones como comparar los valores de funciones, integral, calculadora científica etc.
- Se puede hacer la librería al guardar los datos de proyectos.
- El GRAPES engloba las expresiones de funciones. Por eso el GRAPES puede calcular muy rápido para graficar funciones.
- Cuando el GRAPES regrafica cuando añadamos una gráfica o cambiemos algunos parámetros, sólo redibuja las gráficas que tengan algún cambio. Por eso puede regraficar sin que se siente estrés.
- El GRAPES tiene varias invenciones para que lo manejemos más fácil y para que no necesitemos hacer click muchas veces, como la barra de herramientas y el menú contextual.
- Si usa la función del marcador, le ayudará cuando dé una presentación.

Apariencia del GRAPES

El GRAPES siempre indica **la ventana de gráfica** y el **panel de datos** en la pantalla. Se maneja el GRAPES utilizándolos.

Ventana de gráfica

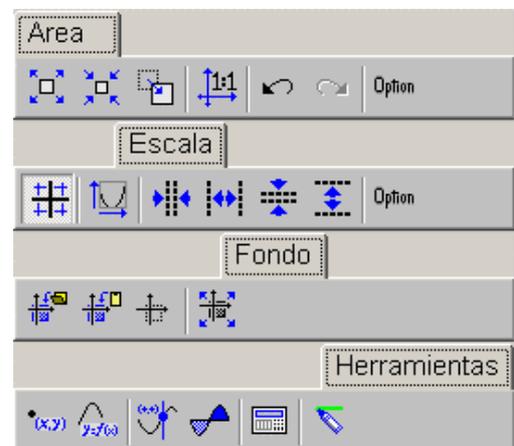


- Se indican gráficas y figuras en la ventana de gráfica.
- Utilizando las tablas de control, se puede designar las cosas siguientes.
 - Dominio y recorrido de indicación
 - Graduación de los ejes
 - Imagen anterior y imagen de fondo
 - Herramientas para investigar funciones
- Cuando cambie el tamaño de la ventana de gráfica, se cambia el tamaño del área de gráfica.

Tablas de control

- Estos menús tienen todos los botones sobre las imágenes de gráficas. Desde arriba,
 - Tabla de [Área]
 - Tabla de [Escala]
 - Tabla de [Fondo]
 - Tabla de [Herramientas]

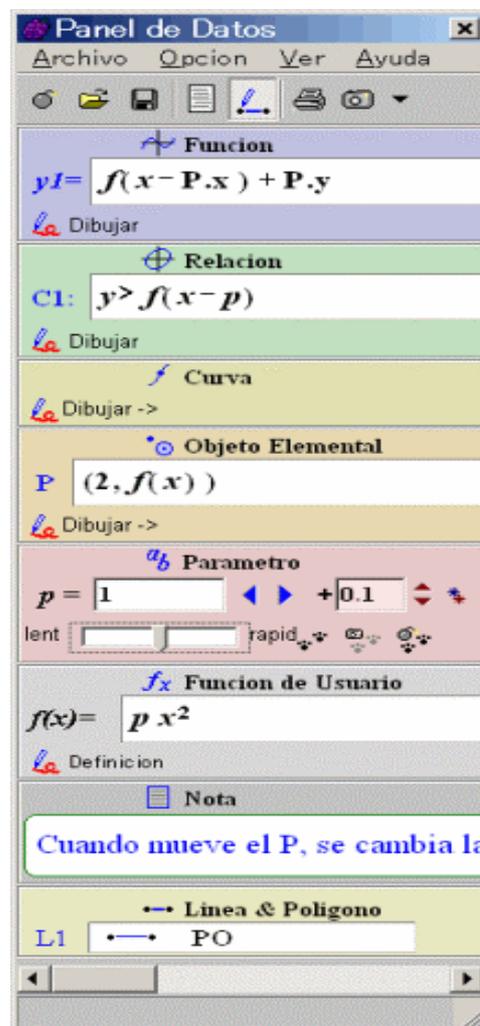
Se puede abrir la página de explicación de cada menú por hacer click el menú del dibujo izquierdo.



- Cuando la ventana de gráfica esté ancha, se indican juntos [Área] y [Escala] y también se indican [Fondo] y [Herramientas].

Panel de datos

- El panel de datos sirve para manejar los datos para dibujar gráficas y figuras.
- Podemos usar el panel de datos en las operaciones siguientes; digitar y modificar funciones y expresiones, manejo sobre parámetro, abrir y guardar archivo.
- En el panel de datos, está la barra de menú en la parte más arriba, luego se ubican las áreas siguientes : (desde arriba; Área de Función, Área de Relación, Área de Curva, Área de Objeto Elemental, Área de Parámetro, Área de Función de Usuario, Área de Nota, Área de Línea y Polígono). Pero normalmente no sale el área de Línea y Polígono.
 - Podemos cambiar el orden de indicar las áreas por hacer drag la parte arriba de cada área.
- Se puede saltar a la página de explicación del área que quiere averiguar, al hacer click en el área del dibujo derecho.



Barra de menú

Por la izquierda,

- [Reiniciar]
- [Abrir], [Guardar]
- [Redactar Nota]
- [Conectar puntos]
- [Imprimir]
- [Copiar]



Al hacer click, puede saltar a la página de explicación.

Barra de menú



[Archivo]

Reiniciar proyecto

Reiniciar todos los contenidos que estén indicados en ese momento.

No se borran todos los que estén guardados en archivos.

Abrir

Sacar los datos que estén guardados.

Leer Nota

Abrir sólo la "Nota" de los datos guardados.

Guardar Como

Guardar los datos de proyectos nuevamente.

Guardar

Guardar los datos modificados sin cambiar nombre de archivo.

Se pierde el dato anterior.

Guardar imagen

El GRAPES guarda las gráficas que estén dibujadas en la pantalla con la forma de "bmp".

Guardar imágenes (con continuidad)

Cuando haya algún cambio sobre gráfica, el GRAPES guarda cada gráfica automáticamente. Cuando el GRAPES las guarde, pone números seguidos a los nombres de los archivo de las imágenes.

Propiedades de impresión

Configurar el tamaño de papel etc..

Imprimir

Imprimir la ventana de gráfica. Se puede designar tamaño de papel y se puede elegir con color (matiz) o sin color (sólo negro)

Cerrar

Cerrar el GRAPES.

[Opción]**Opciones de Dominio**

Configurar el dominio de indicación y el tamaño de la ventana con números concretos.

Opciones de Escala

Configurar la escala de cuadrículado con detalle.

Opciones de Gráfica

Configurar gráficas con detalle.

Opciones de Función

Configurar funciones con detalle. (Las funciones trigonométricas y las funciones logarítmicas etc.)

Reiniciar Parámetros

Reiniciar los valores de parámetros.

Poner incumplimiento

El GRAPES memoriza los contenidos que estén indicados y las ubicaciones del panel de datos y de la ventana de gráfica como la condición inicial nuevamente. El GRAPES realiza la condición cuando usted haga click [Reiniciar].

Reiniciar incumplimiento

Reiniciar la condición inicial que hayan modificado.

Conexionar archivos

Conexionar los archivos de "gps" con el GRAPES.

Después de conexionar, se puede abrir los archivos de "gps" con el GRAPES al hacer click doble.

[Ver]

Barra de menú, Área de Función, Área de Relación, Área de Curva, Área de Figura Básica, Área de parámetro, Área de Función de Usuario, Área de Memo, Área de Línea y Polígono

Designar si se indica cada área.

Indicar Ayuda

Designar si se indica la pista, que sale por donde esté ratón.

Aunque no indique la ayuda, se indica la parte de abajo del panel de datos.

[Ayuda]**Manual de HTML**

Indicar este manual.

Versión

Indicar la versión del GRAPES.

Calculadora Científica

La calculadora científica se utiliza para digitar expresiones matemáticas además de calcular los valores de expresiones.

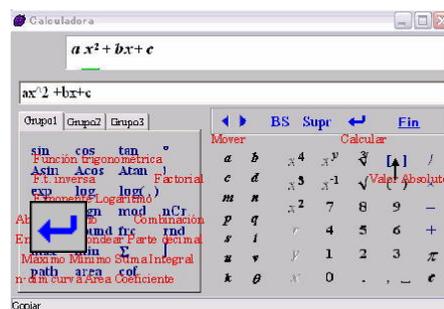
Indicación de la calculadora científica

En los casos siguientes :

- Cuando defina funciones.
- Cuando defina objetos elementales.
- Cuando digite valores paramétricos (solamente cuando haga doble click.).
- Cuando digite el valor de x en la ventana de valor de función (solamente cuando haga doble click.).
- Cuando digite los límites de integral definida en la ventana (solamente cuando haga doble click)
- Cuando haga click en la tabla de [Herramientas] luego en el botón . 

Uso de la calculadora científica

- Para digitar expresiones y valores, se utilizan los botones en la calculadora y también puede digitarlos en el teclado.
- Cuando digite algún valor o alguna expresión, los datos aparecen en la ventana de la calculadora. Y en la ventana siguiente, puede confirmar cómo reconoce el GRAPES los valores y las expresiones que ha digitado.
- Para encontrar valores de expresiones, haga click. Cuando termine de digitar valores y expresiones, haga click el botón [Fin. Def.] para definirlos.
- El GRAPES puede revisar los errores gramáticos pero no es perfecto. Sin embargo, el GRAPES no deja de funcionar por los errores. Sólo no indica el GRAPES los errores de los resultados de calcular (por ejemplo $1/0$ y raíz cuadrada de los números negativos) como gráfica.
- Si quiere saber el detalle de escribir expresiones, haga click aquí (Gramática). Pero normalmente, puede escribirlas como siempre. Salen líneas subrayadas verdes, debajo de las partes de la variable de función, numeradores y denominador de fracción.
- Cuando quiera escribir el parámetro θ usando el teclado, use la tecla '@' en vez de escribir " θ ".



Copiar resultados de la calculadora

- Si quiere copiar los resultados, haga click derecho en la segunda ventana, entonces el GRAPES indica un menú. Y luego haga click [copiar]. se puede copiar los resultados en clipboard. Pero sólo se puede copiar los resultados. No se puede copiar la imagen de la expresión del cálculo.

Dibujar

Digitar y modificar función

La manera de graficar las funciones que tienen la forma $y = f(x)$.

Dibujar

- Haga click en el botón [Dibujar] que está en el área de función (en el menú de datos).
- Luego el GRAPES indica la calculadora científica, digite la función según Explicación de abajo. Luego decida color y grueso de la línea.

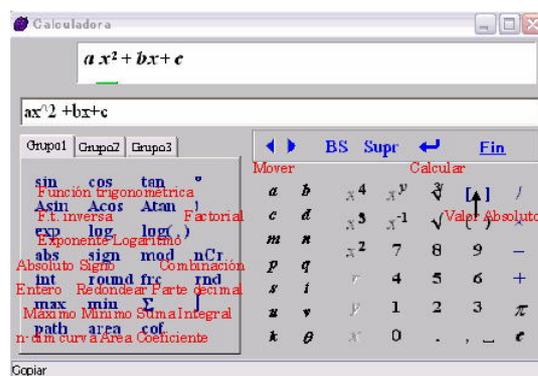


Modificar y Suprimir

- Haga click en la parte que indica la función que quiere modificar o suprimir en el área de función.
- Luego el GRAPES indica la ventana de propiedad. Modifique según Explicación de abajo. Si quiere quitar la gráfica, haga click [Suprimir]

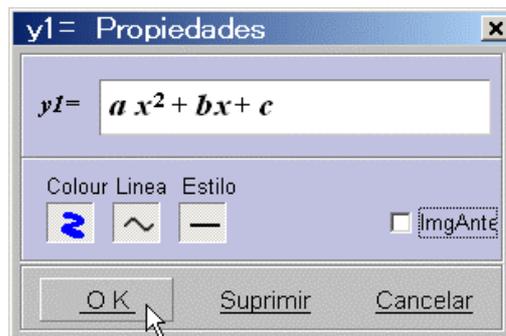
Calculadora científica

- La calculadora científica sirve para que podamos digitar valores y expresiones.
- Podemos digitar con los botones de la calculadora al hacer click y también podemos digitar en el teclado.
- Cuando digite algún valor o alguna expresión, éstos salen en la segunda ventana de arriba de la calculadora. Y en la ventana que está más arriba, podemos confirmar cómo reconoce GRAPES los valores y las expresiones que hayan digitado.
- Después de terminar de digitar, haga click [Fin. Def.].



Determinar estilo de gráfica

- Después de que usted termine de digitar expresión, el GRAPES indica la expresión en el hueco de la ventana de la propiedad de la función. Puede elegir el color de gráfica, el grueso, el diseño de línea, si necesita que el GRAPES grafique Imagen anterior. Luego haga click [OK].
- Para cambiar color y grueso de línea, puede definir en el menú que sale cuando ubique el cursor sobre la indicación de cada parte.
- Si quiere modificar la expresión, haga click en la caja blanca que aparece la expresión.



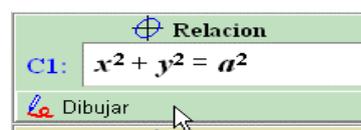
Después de hacer click, aparece la gráfica de la función. Si la expresión tiene parámetro, se mueve la gráfica al cambiar el valor del parámetro.

Digitar y Modificar Relación

La manera de graficar las ecuaciones que tengan la forma $f(x, y)=0$ (o $f(x,y)=g(x, y)$), y desigualdades. Aquí, les llamamos "relaciones" a las ecuaciones y las desigualdades.

Dibujar

- Haga click en el botón [Dibujar] que está en el menú de datos.
- Luego el GRAPES indica la calculadora científica. Digite la expresión y elija el color y el grueso de la gráfica.



Modificar y Borrar

- Haga click en la expresión que quiere modificar o borrar en el área de la relación.
- El GRAPES indica la ventana de propiedad, para su modificación.

Digitar expresión (valor)

- Digite la expresión de la relación, con la calculadora científica.

- Podemos digitar r y θ que son los elementos de ecuación polar, en una expresión de relación. En este caso, $r = \text{Sqrt}(x^2+y^2)$, $\theta = \text{arg}(x, y)$. Podemos usar r , θ , x , y y en una expresión simultáneamente.
 - Si quiere usar θ como un parámetro, como a , b , puede definir en [Opciones de gráfica]



Determinar el estilo de la gráfica

- Después de que digite la expresión, se indica la expresión en la ventana de propiedad. Aquí se elige el color y el grueso, si el GRAPES dibuja imágenes anteriores. Luego haga click en [OK].
- Cuando digite una expresión de desigualdad, se indica el área que expresa la desigualdad, elija el diseño para sombrear el área e indique el límite del área con línea de color más suave.
- Para cambiar el color y el grueso, cuando ubique el cursor sobre la tecla que quiere cambiar, sale un menú. En éste, puede modificar.
- También se puede modificar la expresión al hacer click.

Después de hacer click en [OK], Se indica la gráfica de la función. Si la expresión tiene parámetro, se puede mover la gráfica al modificar el valor del parámetro.

Complementos

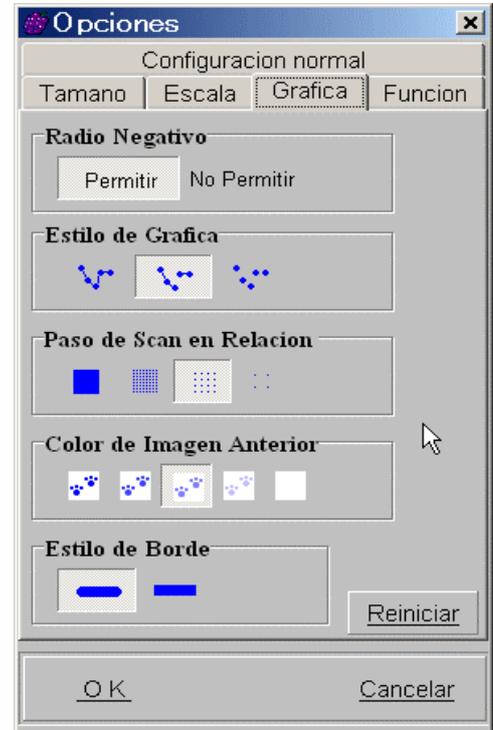
1. **Sobre el cálculo de la curva cuadrática y la función polinomial con alta velocidad**
 - El GRAPES puede graficar muy rápido las funciones polinomiales cuyos grados de x y y son menor o igual que 6 respectivamente, al aplicar los 49 puntos que están en el área de gráfica de la manera de calcular "La interpolación de Lagrange (Lagrange interpolation)".
 - El GRAPES grafica la curva cuadrática, por resolver la ecuación de la función.
2. **Usar funciones discontinuas puede ser la causa de que el GRAPES grafique mal.**
 - Cuando el GRAPES grafique relaciones generales, el GRAPES no las grafica por resolverlas sino que grafica por encontrar un punto, donde cambia el signo de valor de la función. Por eso si la función tiene una parte discontinua, el GRAPES puede dibujar una gráfica incorrecta.
 - El GRAPES averigua si la función dada es un polinomio cuyo grado es menor o igual que 6, por comparar los valores de la interpolación de Lagrange y los valores de la función sobre varios puntos elegidos al azar. Y también averigua sobre la curva cuadrática.

Por eso el GRAPES puede indicar un resultado equivocado cuando trate algunas funciones especiales como funciones discontinuas.

Si sale un resultado extraño, intente quitar la marca de la caja de check **[Dibujar en polinomio rápido]**.

3. Sobre ancho de sacar puntos

- El GRAPES encuentra los valores de todos los puntos, de una función que están en el área de la gráfica, para graficar. Por eso tarda bastante en calcular sobre las funciones que no pueda el GRAPES utilizar [Dibujar en polinomio rápido]. En este caso, podemos ahorrar el tiempo de graficar, no sacar todos los puntos sino sacarlos a grandes puntadas primero y sacar los otros puntos con la interpolación de Lagrange. Por eso hay cuatro opciones siguientes para graficar:
 1. Sacar todos los puntos.
 2. Sacar puntos cada 2 dots.
 3. Sacar puntos cada 4 dots.
 4. Sacar puntos cada 8 dots.



- Podemos seleccionar una de arriba en **[Paso de Scan en Relación]** que está en la tabla de gráfica.

Área de desigualdad

La manera de dibujar las áreas que expresa desigualdades.

La manera es la misma que graficar relación.



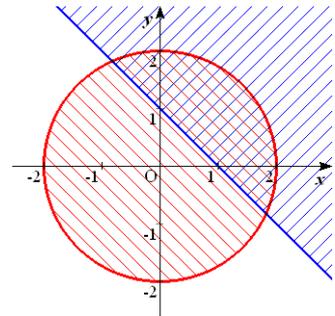
- Cuando digite una relación, no digite el signo de igualdad sino el signo de desigualdad.

Sobre gráficas de relación

- Cuando unamos los dos lados de expresión con "=", el GRAPES indica **el límite** que exprese la igualdad.
- Cuando unamos los dos lados con ">" o "<", el GRAPES dibuja **el área** que exprese

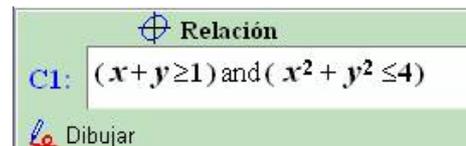
la desigualdad. Podemos decidir si se indica el límite del área en la Ventana de propiedad de relación (En este caso, se indica la línea con un color más suave)

- Cuando unamos los dos lados con " \geq " (Digite " \geq ") o " \leq " (Digite " \leq "), el GRAPES dibuja **el área y el límite** de que exprese la desigualdad.



Indicar área común de varias áreas

- Coloque cada desigualdad entre paréntesis, luego digite "and" entre las dos expresiones como el ejemplo derecho.
- Podemos digitar así : $f(x) < y < g(x)$.



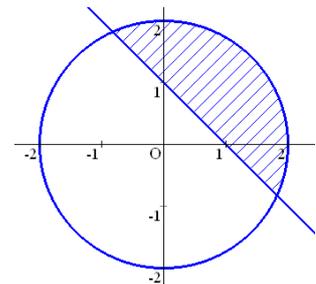
Ejemplo 1 : Para dibujar el área común de " $x+y>1$ " ^ " $x^2+y^2<4$ ", digite como lo siguiente.
 $(x+y>1)$ and $(x^2+y^2<4)$

Ejemplo 2 : Para dibujar el área común de " $x<y$ " ^ " $y<x^2+1$ ", digite como lo siguiente.
 $(x<y)$ and $(y<x^2+1)$

También podemos digitarlo.

$$x < y < x^2 + 1$$

¡Ojo! : No se puede usar "or". No se puede colocar "and" entre paréntesis.



Gráfica paramétrica

Se puede dibujar gráficas paramétricas como $x=f(t)$, $y=g(t)$.

Dibujar

- (En la tabla de datos) Cuando haga click en el botón [Dibujar] que está en el menú de "Curva", el GRAPES indica una ventana. En esta ventana, aparece un menú de gráficas, para elegir un tipo de figura. Haga click en un botón del menú.
- El GRAPES indica una ventana de propiedad, digite datos para graficar según las explicaciones de abajo.



Modificar y Suprimir

- En el menú de "Curva", Cuando haga click, la parte que salga la expresión que quiera modificar o suprimir, se indica la ventana de propiedad. Se puede modificar según las explicaciones siguientes.

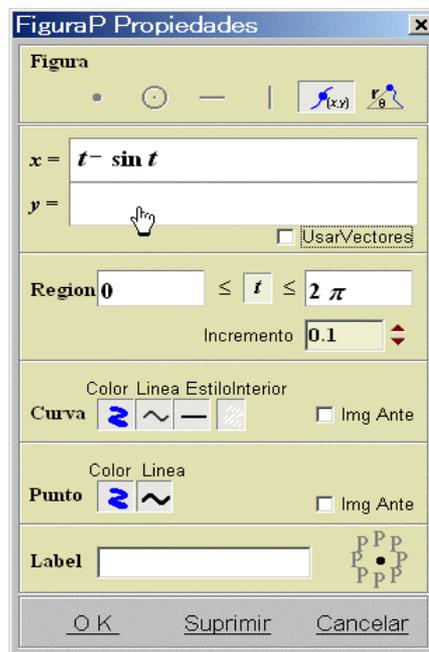
Definir tipo de ecuación

- Se puede elegir [Curva] (gráfica paramétrica) o [Ecuación Polar].
- Ahora intentamos elegir [Curva] como un ejemplo.



Digitar expression (valor)

- Haga click en el blanco que está a la derecha de "x=".
Se indica la calculadora científica. Digite una expresión. Se puede utilizar cualquier parámetro de la calculadora.
- Digite una expresión en el blanco de "y=".
- Cuando use "x", "y", éstos significan los valores de la coordenada de "x" y la coordenada de "y" del punto que esté editando respectivamente. Si quiere poner valores de otros puntos, por ejemplo si quiere utilizar el valor del punto A, puede escribir como "Ax", "Ay". Y también puede utilizar valor de radio. Entonces escriba como "Ar". No se puede escribir parámetro como "y1" ... "y9".



Definir parámetro y su dominio

- Elija un parámetro en la parte "Dominio" en el menú de propiedad de gráfica. Primero, sale el parámetro "t". Cuando coloque cursor sobre "t", puede elegir otros parámetros.
- Digite el límite inferior y el límite superior del parámetro que quiere definir utilizando la calculadora científica. Se puede definir los valores en la forma de expresión matemática.
- Defina el valor de ancho de variación de parámetro.
Para graficar más exactamente, elija un número más pequeño.
Digitar un número que es menor o igual que 3000 como el valor de (Límite superior - Límite inferior) ÷ (Ancho de aumentar y disminuir).

Definir estilo de gráfica

- Se puede seleccionar color de curva y punto, tamaño, estilo de línea, dibujar imágenes anteriores, indicar label.
El color interno es transparente en la condición inicial. Se puede pintar el interior.
- Después de que digite, haga click en [OK].

Punto sobre una gráfica paramétrica

- Cuando grafique una gráfica paramétrica, el GRAPES indica un punto sobre la curva de la gráfica paramétrica. Aunque elija transparente como el color para el punto de la gráfica paramétrica, el GRAPES sigue indicando la curva de esa gráfica.
- El punto de la gráfica paramétrica que indique el GRAPES se mueve por el valor de parámetro.

Nombre del punto (Indicar label)

- Se puede nombrar los puntos, y también se puede indicar los nombres en donde señale usted.
- Normalmente el GRAPES indica el nombre del botón que seleccionó, cuando digite en la caja de texto, el GRAPES lo indica.
- Se puede indicar una expresión matemática o un valor de expresión como el nombre del punto como la misma manera que la "Nota". Pero no utilizar nombres que sean largos, como lo que necesiten varias líneas para escribirse, no se puede cambiar el color que indica el GRAPES.
- Se puede cambiar el tamaño de letras en el menú de opción de escala

Gráfica de ecuación polar

Graficar ecuación polar

Por ejemplo: La curva de la rosa : $r = \sin(n\theta)$.

- Primero elija "P" (Por supuesto que se puede elegir uno de P, Q, R, S, ... libremente) en el área de curva. Luego elija [Ecuación polar] como clase de curva.
- Digite " $r = \sin n\theta$ ".
Digite "@" para que indique " θ " la calculadora científica.
- Defina el ancho de graficar. El ancho influye en la suavidad de curva. El valor más pequeño da la más suavidad de curva.



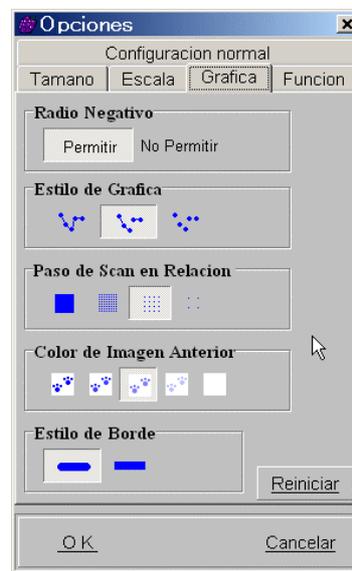
- Si necesita usted, cambie el dominio.
- Defina color y grueso de curva o punto.
- Haga click [OK].

Cuando el radio de ecuación polar sea número negativo

Cuando tratemos la ecuación polar $r = f(\theta)$, hay casos que r es número negativo el radio. En los casos así, Se puede procesar como en las dos maneras siguientes.

1. No existen los puntos así (El GRAPES no dibuja esos puntos).
2. Definir el punto $(r, \theta) = (-r, \theta + \pi)$.

En el GRAPES, el radio está definido con la manera 2. Pero puede designar 1 ó 2 libremente. Si quiere designar la manera 1, elija [No permitir] en la opción del menú de datos o del menú de gráfica.



Graficar relación de ecuación polar

- Cuando digite relación, puede dibujar las gráficas de ecuación polar al digitar la ecuación con r y θ .
 - Puede usar x, y además de r y θ en una ecuación.
 - El GRAPES trata el parámetro θ como la variable de argumento de la función. por eso no se puede sustituir θ que esté en una relación por un número.
 - Si usa funciones discontinuas como función fraccionaria, es posible que el GRAPES no pueda graficar exactamente.



[Información interna del GRAPES]

$r = \text{Sqrt}(x^2+y^2)$, $\theta = \text{arg}(x,y)$. "arg" es una función que resulta valores de ángulo entre 0 y 2π ó entre $-\pi$ y π . Por eso, cuando el punto (x,y) cruce el eje de X el valor de $\text{arg}(x,y)$ se cambia discontinuamente. Ello causa inexactitud de gráficas que grafica el GRAPES.

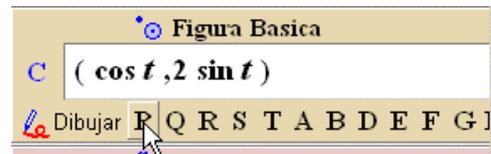
Digitar y modificar objetos elementales

El GRAPES puede graficar círculos por designar centro y radio, puntos, líneas horizontales y líneas verticales. GRAPES llama estos dibujos "Objetos elementales" como nombre

general.

Dibujar

- Cuando ubique el cursor en el botón de [Dibujar] que está en el área de "Objeto elemental" (que está en el panel de datos), GRAPES indica "P, Q, R, ..." como nombre de dibujo. Elija uno.
- Después de que elija uno, sale una ventana de propiedad de dibujo. Digite datos de dibujo según la explicación siguiente.



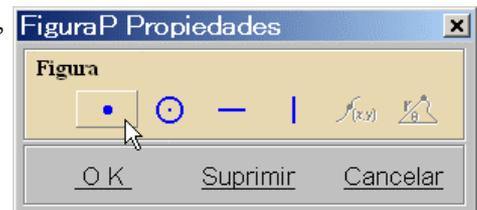
Modificar y Suprimir

- Cuando usted haga click en la parte que tiene expresión, en el área de objetos elementales, aparece una ventana de propiedad. Puede modificar y eliminar esa gráfica según la explicación siguiente.

Definir clase de gráfica

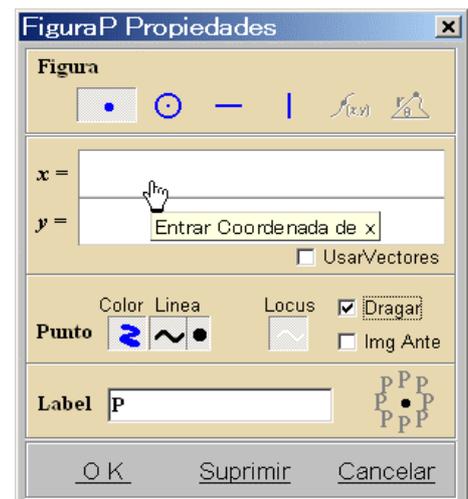
- Primero elija uno de los siguientes: círculo, punto, línea horizontal y línea vertical.

Ahora le explico suponiendo que eligió [Punto]



Digitar expresión(valor)

- Haga click en el hueco que ubica a la derecha de "x =". Entonces aparece la calculadora científica. Puede digitar una expresión de parámetro, el punto se puede mover por el parámetro.
- Digite una expresión o un valor para definir "y =" imitando el ejemplo de "x ="
- Si usa "x" ^ "y" para definir un punto, entonces "x" ^ "y" significan los valores de la coordenada de "x" y la coordenada de "y" del mismo punto respectivamente. No se puede usar expresiones como "y1", ..., "y9". Si quiere usar los valores de otros puntos, digite como "Ax", "Ay", "Ar" (en este caso significan el valor de la coordenada de "x" del punto A, el valor de la coordenada de "x" del punto B, el valor de radio del círculo A respectivamente.)



Definir estilo de gráfica

- Por último, elija el color del punto, tamaño, dibujar imágenes anteriores de la gráfica e indicar label, lugar geométrico. Para graficar punto con agujero (como donuts...), Puede elegir este estilo al ubicar el cursor a la derecha de la ventana, para definir grueso.
- Después de que digite, haga click [OK].
- Cuando digite una expresión o un valor para definir otras gráficas, se puede definir como definir puntos. Cuando quiera graficar un círculo, hay que digitar una expresión o un valor de radio "r". Para definir una línea horizontal, hay que digitar "y". Para definir una línea vertical, hay que digitar "x".

Lugares geométricos

- Se puede dibujar, lugar geométrico de los puntos que estén definidos con parámetro.
- Para dibujar lugar geométrico, defina las gráficas que quiera graficar con parámetro. Luego elija el grueso de lugar geométrico (el color de la línea es lo mismo que el punto). Ya puede graficar al cambiar el valor de parámetro, usando el botón de aumentar y disminuir.
- Si quiere dibujar gráficas paramétricas, es mejor elegir [Curva] en el área de "Curva".
- GRAPES grafica el lugar geométrico como imágenes anteriores. Por eso para borrar lugares geométricos, haga como borrar imágenes anteriores.

Sobre label

- Se puede poner labeles para puntos y líneas. Y también se puede indicar en un lugar designado.
- Normalmente el GRAPES indica el label de esa gráfica. Pero si escribe algunas letras en la caja de texto, Se indica esas letras en el label.
- Se puede indicar expresiones matemáticas y valores de expresión en el label como Memo. Pero no se puede escribir varias líneas, no se puede cambiar el color de letras en label.
- Designe el tamaño de letras en la opción de escala.
Hay varias decoraciones de letras. Véase aquí; Decoración de letra.

Para dibujar puntos fácilmente

- Cuando haga click derecho en el lugar donde quiere dibujar un punto en el área de gráfica, sale el menú contextual. Elija [Poner punto]

Dibujar líneas y polígonos

Se puede trazar líneas rectas entre los puntos de objetos elementales y los que estén sobre gráficas. Se puede dibujar figuras como polígono utilizando esta función. También, se puede trazar líneas horizontales, líneas verticales y perpendiculares para el eje de "X" y "Y".



Haga click en este botón cuando quiera trazar línea recta entre dos puntos.

- Haga click en este botón  que está en la barra de herramientas del menú de datos como el dibujo derecho.



Haciendo click en éste, el cursor funciona para trazar línea recta.

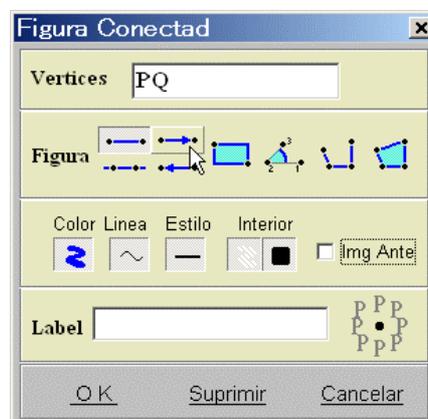
- Para cancelar esta función, haga una de las acciones siguientes, hacer click en éste otra vez, hacer click en el botón de ampliación, hacer click en el botón de reducción y hacer click en el botón de traslado.

Hacer drag con ratón

- Cuando se ubique el cursor sobre los puntos definidos, como centro de un círculo o los de objetos elementales, el cursor se transforma en la forma de un lápiz.
- Entonces, haga drag apretando el botón izquierdo del ratón hasta uno de los otros puntos o uno de los ejes que quiera conectar. Cuando llegue el cursor sobre la otra figura, se cambia el color de la figura. Bajo esta situación, deje de apretarlo.

Definir diseño de figura

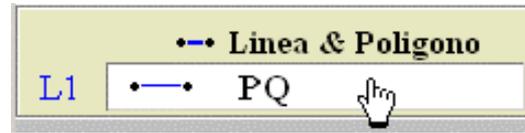
- Después de que deje de apretar el botón izquierdo, aparece la ventana de propiedad sobre la línea. Determine el diseño de la línea (segmento, línea recta, flecha, cuadrado), color, grueso, si necesita que dibuje el GRAPES imagen anterior.
- Cuando elija dibujar cuadrado, puede determinar el color interno del cuadrado.
- Para indicar label de la figura, digite el nombre que quiera indicar, en la caja de texto y elija la posición donde salga las letras al hacer click en la parte que



está a la derecha de la caja.

Modificar diseño

Hay dos maneras para indicar la ventana de propiedad de la línea, como las siguientes.

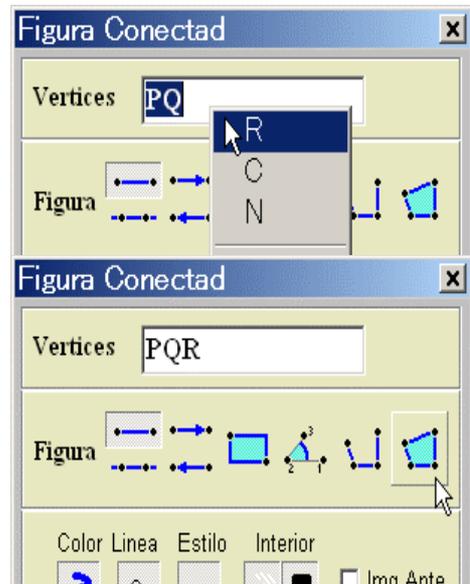


1. Indicar el área de figura al hacer click  que está en la barra de herramientas. Luego haga click en la parte de la figura que quiera cambiar de diseño.
2. Haga click derecho cuando el cursor esté sobre la figura. Luego elija "Propiedad de segmento".

Dibujar polígono o trazar líneas entre puntos

Cuando designe más de tres puntos como vértices, puede dibujar ángulos, polígonos y trazar líneas entre puntos.

- Primero conecte dos puntos de los puntos de la figura que quiera dibujar, con la misma manera de dibujar un segmento.
- Añada los otros puntos en el hueco de "Vértices" al hacer click derecho. Por supuesto que puede digitar en el teclado. En el caso de dibujar un ángulo, los vértices son tres.
- Elija uno de ángulo, línea entre puntos y polígono.
- Si elige ángulo o polígono, puede designar el color interno.



Función de usuario

Las funciones de usuario que podemos utilizar al definir las libremente son cinco: f, g, h, f1, f2. Se puede utilizar la derivada y la integral indefinida al usar las funciones.

Definir función de usuario

- Haga click el área de función de usuario que está en el menú de datos. Luego defina una función de x.

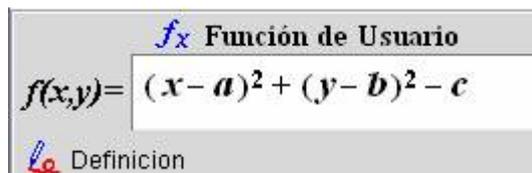


- Casi no hay límites sobre la gramática.
 - No se puede definir una función citando la función misma.
 - No se puede citar las funciones gráficas de y1 a y9 para definir una función de usuario.

Sobre función de dos variables

Si la función tiene la variable "y", GRAPES trata la función como la función de dos variables.

- Cuando cite este tipo de función, use dos variables como $f(2x,a)$.
- Cuando la función tenga sólo una variable como $f(2x)$, el GRAPES interpreta como $f(2x,0)$.
- Cuando use "r" y "θ" para definirla, el GRAPES trata el radio de (x, y) y el ángulo de (x, y) respectivamente.
Si quiere usar "θ" como un parámetro, haga click "Parámetro" en "Theta en Relación" en "Opciones de función".



$$f(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - c$$

Sobre vector

- Se puede utilizar vectores y puntos para definir una función.
En este caso, se sustituye la variable de x por el componente de x del vector y se sustituye la variable de y por el componente de y del vector.
Por eso $f(P)$ significa $f(P.x, P.y)$.
- Se puede tomar valor de vector como valor de función.
Por ejemplo, la función $f(t) = tP + (1-t)Q$ da un punto que divide el segmento PQ por (1-t) entre t de razón.

Utilizar derivada e integral

El GRAPES puede derivar e integrar sólo las funciones de usuario. Por eso si quiere calcular derivada o integral indefinida, puede calcularlas al definir la función que quiere derivar o integrar como una función de usuario.

Por ejemplo, para graficar la derivada de $\sin x$, primero definimos una función de usuario como $f(x) = \sin x$, luego sea $y1 = f'(x)$.

Tratamiento de vector y punto

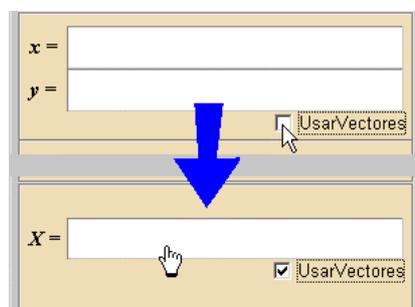
GRAPES puede tratar vectores y puntos en la forma de coordenada directamente. Por eso no necesitamos descomponer a los componentes o las coordenadas.

Concepción básica

- No hay distinción entre la forma de punto y la forma de vector. Podemos tratar todos los puntos como los vectores de posición.
- Si escribe dos números reales entre paréntesis como el ejemplo siguiente, el GRAPES lo trata como un vector.
Ejemplo:(2, 3)
- Cuando escriba dos nombres de objetos elementales al lado, el GRAPES los trata como un vector de desplazamiento.
Ejemplo: Cuando escriba PQ en una expresión, PQ funciona como un vector, igual que la resta de dos vectores; Q-P.
- Podemos definir un objeto elemental y un vector con otros objetos elementales y otros vectores sin citar los componentes.
 - Ejemplo: Para definir el punto céntrico A del punto B y el punto C, podemos digitar "(B+C)/2".
- Operación de vector
 - GRAPES puede hacer las operaciones siguientes, que son: suma, resta, producto interior vectorial y multiplicación escalar.
- Función que resulta valor vectorial (Los siguientes son unos ejemplos principales)
 - Función que resulta puntos céntricos o puntos que divide dos puntos por una razón dada.
 - Función que gira los puntos dados alrededor del origen.
 - Función que resulta la intersección de dos líneas dadas.
 - Función que resulta el centro de un círculo circunscrito.
- Función que tiene variable vectorial y resulta número real (Los siguientes son unos ejemplos principales)
 - |P|: La longitud de vector (Digite "[P]". Igual que valor absoluto)
 - Valor de determinante
 - Función que resulta el ángulo de dos vectores.
- Tratamiento de función de usuario y vector
 - Podemos definir una función como la que dé valor vectorial.
 - Podemos usar vector para definir una función de usuario como su variable.
- Cuando calcule derivada, suma de sigma, integral definida \int , el GRAPES puede tratar vector. Pero no puede tratarlo cuando calcule integral indefinida.

Para digitar objeto elemental y curva con vector

- Marque el hueco de [Vector] en la ventana de propiedad al hacer click.
- Digite la expresión de vector
 - Ej 1: (P+Q)/2: Punto céntrico de P y Q.
 - Ej 2: P+(1,2): Punto trasladado de P por vector (1,2)



Relación entre vector y punto (objeto elemental, curva)

- El GRAPES no distingue punto y vector de posición. Trata igual.
Ej. : $(2P+3Q)/5$ significa el punto que divide el segmento PQ por la razón de 3 entre 2.
- P.x expresa la coordenada de x de P, P.y expresa la coordenada de y de P.
Ej. : Cuando $P=(2,3)$ entonces $P.x = 2$, $P.y = 3$
 - Radio de un círculo: P.r expresa el radio del círculo P.
- Cuando escriba dos nombres de objetos elementales al lado, GRAPES los trata como un vector de desplazamiento.
Ej. : Cuando escribamos PQ, PQ expresa el vector PQ. En la calculadora científica sale signo de flecha de vector.
 - Naturalmente, vector $PQ = Q-P$.
 - $[PQ]$ expresa la longitud del segmento PQ.
- Podemos definir un objeto elemental y un vector con otros objetos elementales y otros vectores sin citar los componentes.
 - Marque el hueco de [Vector] en la ventana de propiedad al hacer click.
 - Ej. : Ejemplo: Para definir el punto céntrico A del punto B y el punto C, podemos digitar " $(B+C)/2$ ".
(Antes había necesidad de definir cada componente como $x=(Bx+Cx)/2$, $y=(By+Cy)/2$.)

Función sobre vector y componentes

- Función que resulta vector: el GRAPES trata una combinación de dos números entre paréntesis como un vector.
 - Ej. : $(2, 3)$, $(t-\text{sint}, 1-\text{cost})$
- Función que resulta componentes de vector: Resulta el componente de X y el componente de Y de un vector.
 - .x: El componente de x del vector $(2,3)$ es $(2,3).x = 2$
 - .y: El componente de y del vector $(2,3)$ es $(2,3).y = 3$

Mover

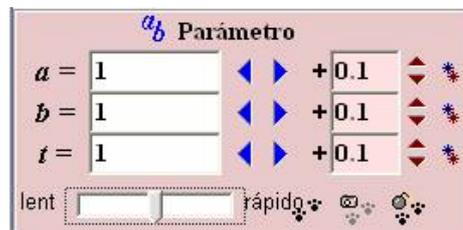
Parámetro

Cuando una expresión de gráfica incluya parámetros, si los valores de los parámetros se cambian, la forma de la gráfica también se cambia. Podemos observar cómo se cambia la forma de gráfica dinámicamente, por utilizar la función de lugar geométrico y la función de imagen anterior.

Sustituir parámetro por valor

Primero haga click en la parte del valor de parámetro, luego digite un número para sustituir.

- Cuando haga doble click, sale la calculadora científica. Puede utilizarla para digitar número.



Aumentar y disminuir parámetro

- Haga click en el botón para aumentar y disminuir.
- Cuando siga presionando, el valor se cambia consecutivamente.
- Se puede designar la velocidad de aumento y disminución en la parte más abajo.

Designar intervalo de aumento y disminución

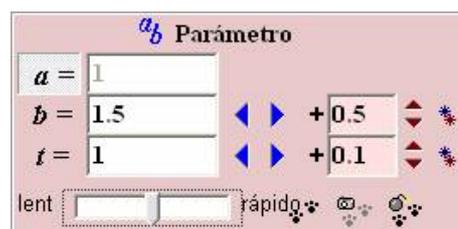
- Se puede elegir uno de suma y multiplicación como la manera de aumentar y disminuir por hacer click la parte que sale [+]
- Se puede designar el intervalo de aumento y disminución por una de las maneras siguientes.
 - Hacer click .
 - Digitar un número concreto directamente.
 - Después de hacer doble click para que salga la calculadora científica, digitar un número.

Aumentar y disminuir más de dos parámetros al mismo tiempo

- Se puede cambiar valores de más de dos parámetros al mismo tiempo.
- Se puede cambiar los valores de los parámetros que estén activados estos botones al mismo tiempo.
- Puede cambiar los valores de los parámetros que estén activados con la misma cantidad por cambiar uno de los valores de los parámetros.

Fijar valores de parámetro

- Se puede fijar valor de parámetro al hacer click en la letra del parámetro. Si el botón de la letra de parámetro está activado, ya el valor de ese parámetro está fijado. (Ej. : El parámetro "a" está fijado en el dibujo derecho)
- Para cancelar esta fijación, haga click otra vez.

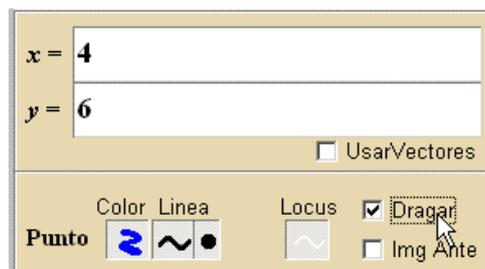


Hacer drag puntos

Cuando el centro de un círculo o punto estén definidos con números concretos, se puede hacer drag con el ratón. Se puede cambiar la forma de gráficas con el ratón como una aplicación de esta función.

La condición para hacer drag

- Cuando el centro de un círculo o punto estén definidos con números concretos, el GRAPES indica una caja de drag. Si hace click aquí, puede hacer drag el punto que quiere mover. Pero cuando no haga click, no puede hacer drag.
- Cuando la coordenada de x o y de punto, las dos coordenadas estén definidas con expresión matemática, por ejemplo como "Q(4+0,7-1)", entonces no se puede hacer drag.
- Cuando sólo una de las dos coordenadas esté definida con expresión matemática, entonces se puede hacer drag hacia sólo la dirección que defina la expresión matemática. Por ejemplo, cuando un punto esté definido como (3.0, sin x), se puede moverlo sobre la curva $y=\sin x$.



Hacer drag

- Cuando coloque el cursor sobre los puntos que se puedan mover, la forma del cursor se cambia en un dibujo de mano. Entonces hace drag, puede mover los puntos.

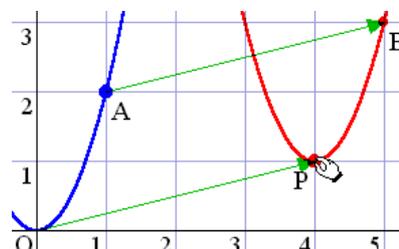
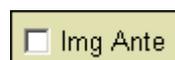


Imagen anterior

Cuando modifiquemos algún parámetro de una función, se cambia la forma de la gráfica de la función. Pero el GRAPES tiene una función para que las gráficas anteriores sigan dibujadas. A estas gráficas se les llaman las imágenes anteriores.



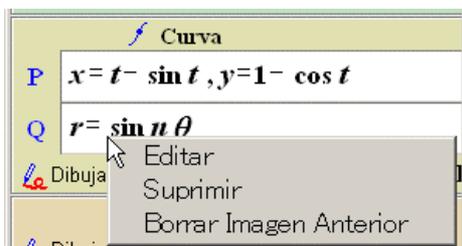
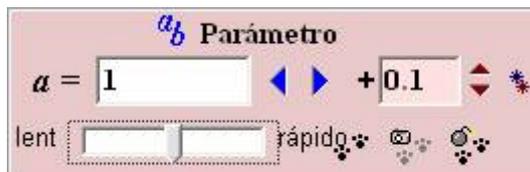
Para dibujar imagen anterior

- Marque [Imagen anterior] que está en la ventana de propiedad del gráfica.



Borrar todas las imágenes anteriores

- Se puede borrar todas las imágenes anteriores y los lugares geométricos. Este botón está en el área de parámetro.



- Para borrar las imágenes anteriores de unas gráficas determinadas, Elija [Borrar Imagen Anterior] que está en un menú que aparece cuando haga click derecho en la expresión.

- Cuando suprima gráfica o figura, desaparecen sus imágenes anteriores.



No dibujar imagen anterior

- Cuando haga click en este botón, éste se cambia así . Bajo esta condición, el GRAPES no dibuja imagen anterior.
- Para cancelar esta condición, haga click otra vez.

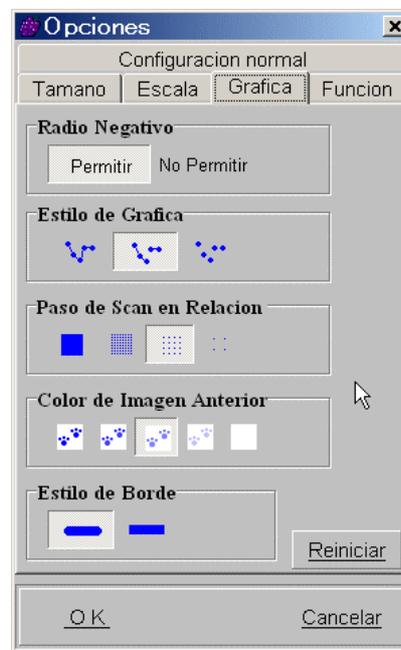


Poner una imagen anterior

- Cuando haga click en este botón, puede poner una imagen anterior de las gráficas dibujadas aunque el GRAPES no esté determinado de poner imagen anterior. El GRAPES dibuja una imagen anterior de cada gráfica cuando haga click como si tomara una foto.

Matiz de imagen anterior

- El GRAPES dibuja la imagen anterior con color suave en la condición inicial para que podamos distinguir imagen original e imagen anterior. Podemos modificar la suavidad de imagen anterior en [Opciones de Gráfica].
- Para indicar [Opciones de Gráfica], haga click [Opción]. Luego elija la tabla de [Gráfica].



Panel de control

Tabla de [Área]

Cambiar área de indicación

Se puede extender gráficas y se puede cambiar dominio y recorrido. Para efectuarlos, Use los botones que están en la tabla de [Área].



Aumentar

- Este botón sirve para aumentar gráficas.
- Haga click en el botón de Aumentar. La ventana de cuadriculado va a estar bajo la condición de que se pueda cambiar dominio y recorrido.
- Bajo esta condición, se puede dibujar un rectángulo en la ventana por hacer drag. Después de hacer drag, el dominio y el recorrido del rectángulo dibujado son el dominio y el recorrido de la ventana de cuadriculado respectivamente.
Cuando sólo haga doble click izquierdo en la ventana de cuadriculado, se puede extender el doble del dominio y el recorrido de la gráfica dibujada en la ventana.
 - Si quiere cancelar esta operación cuando esté haciendo drag, haga click derecho sin soltar el click izquierdo.



Reducir

- Este botón sirve para reducir gráficas.
- Haga click en el botón de Reducir. La ventana de cuadriculado va a estar bajo la condición de que se pueda cambiar dominio y recorrido.
- Bajo esta condición, se puede dibujar un rectángulo en la ventana por hacer drag. Después de hacer drag, la ventana va a reducir el rectángulo.
Cuando sólo haga doble click izquierdo en la ventana de cuadriculado, se reduce a la mitad el dominio y el recorrido de la gráfica dibujada en la ventana.
 - Si quiere cancelar la operación cuando esté haciendo drag, haga click derecho sin soltar el click izquierdo.



Mover

- Este botón sirve para mover gráficas.
- Haga click en el botón de Mover. Moviendo el cursor haciendo drag, se mueve la gráfica dibujada.

- Si quiere cancelar la operación cuando esté haciendo drag, haga click derecho sin soltar el click izquierdo.
- Si su ratón tiene tres botones, el botón medio funciona para mover la gráfica dibujada independientemente de las tres condiciones de arriba.



1:1 (Igualar la anchura y la altura)

- Hacer click en este botón, se igualan las medidas de los ejes "X" y "Y" a razón de 1 por 1.
- Mientras esté activado este botón, se puede cambiar el dominio y el recorrido igualando la anchura y la altura.



Deshacer

- Hacer click en este botón, se obtienen los dominios y los recorridos anteriores.



Rehacer

- Hacer click en este botón, se obtiene los dominios y los recorridos posteriores.

Cambiar tamaño de ventanas

Se puede cambiar el tamaño de la ventana de gráfica desde 150×150 y hasta 1200×1200.

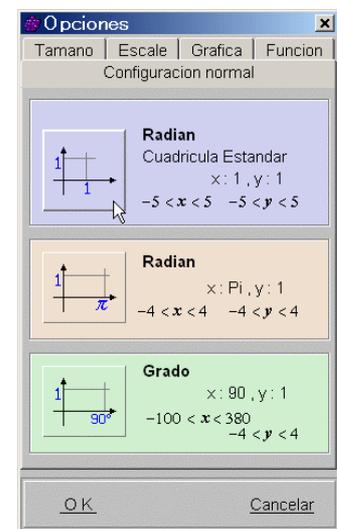
Se puede cambiar el tamaño de la ventana de gráfica con hacer drag. También se puede definirlo con números concretos.

Configuración normal (menú [Área] option)

- Ya están inscritos los tres patrones que usamos normalmente. Primero elija uno de los tres y luego si necesita modificar algo, puede cambiar en [Tamaño] y [Escala].
- Especialmente, es conveniente este menú cuando tratemos gráficas trigonométricas.

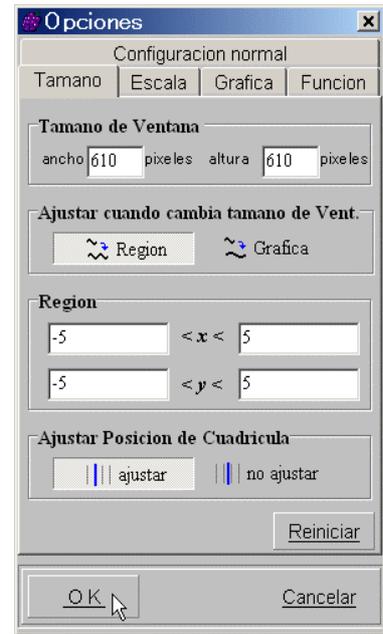
Definir dominios con detalle

Cuando haga click [Tamaño], puede definir dominios con detalle.



Digitar los valores del tamaño de ventana y el área de gráfica

- Se puede definir los valores del tamaño de ventana, el área de gráfica con números concretos.
- Si elige [Ajustar] en "Ajustar Posición de Cuadrícula", cuando el ancho de la graduación de ejes tenga un valor de número entero, GRAPES modifica bien el área de gráfica para que ubiquen exactamente las graduaciones de ejes por los números de matrices de la pantalla de computadora.



Dilatación y contracción del área de gráfica



- Haga click en este botón.
- Cuando cambie el tamaño de la ventana, bajo esta condición, el área de gráfica se dilata o se contrae manteniendo la forma y tamaño de gráfica al cambiar el dominio del eje de X y el recorrido del eje de Y.

Dilatación y contracción de gráfica



- Haga click en este botón.
- Cuando cambie el tamaño de ventana, bajo esta condición, el área de gráfica dibujada se dilata o se contrae manteniendo el dominio del eje de X y el recorrido del eje de Y por cambiar la forma y tamaño de la

Determinar diseño de escala

En el menú [Escala] hay unos botones para controlar el diseño de escala.

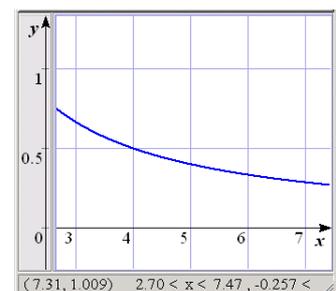


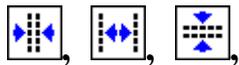
Este botón sirve para indicar o no indicar las líneas cuadriculadas



Este botón sirve para indicar o no indicar los ejes que estén fuera del área cuadriculada

- Cuando los ejes queden fuera del área cuadriculada, puede indicar los ejes al lado del área cuadriculada como el dibujo derecho.





Estos botones sirven para ajustar los anchos de la escala

option

Este botón sirve para determinar el diseño del área de cuadrulado con detalle

- Se puede determinar e indicar los números de escala y suprimir, las líneas cuadruladas y los ejes, se puede determinar "el valor básico" (1, Pi ó 90) sobre el eje de "X" y el eje de "Y" respectivamente.
- Se puede determinar el grueso de ejes y el diseño de las líneas cuadruladas.
- No se puede determinar el ancho de escala directamente.

Se determina el ancho de escala automáticamente basándose en "el valor básico" como $\times 2$, $\times 5$, $\times 10$, o $\div 2$, $\div 5$, $\div 10$, por el cambio de l dominio y recorrido. Por ejemplo, originalmente el valor básico está determinado por 1. Por eso el ancho de escala se cambia como 2 , 5, 10, 20, 50, 100, ... ó 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, ...

- Se puede añadir la unidad de ángulo " ° " a las letras del eje de X. (Cuando se elija el modo de ángulo, en la tabla de configuración normal)
- Originalmente las letras de la escala se ubican a la par de las líneas cuadruladas. Pero también puede ubicarlas sobre las líneas.



Label de ejes y Variable de la abscisa

- Se puede cambiar el label de los ejes libremente.
- Cuando elija θ como la variable de la abscisa, la variable θ funciona como la variable "x". Por eso, en esta situación, si graficamos $y = \sin x$, el GRAPES indica la gráfica de $y = \sin \theta$.

Tamaño de letras

- Se puede determinar el tamaño de las letras del label de los ejes, "x" y "y".
- El tamaño de las letras del label de objeto elemental es igual que el de las letras del label de los ejes.

Pegamos imagen en el fondo de la ventana de gráfica

Se puede pegar una imagen en el fondo de la ventana de la gráfica.



Leer un archivo de imagen y pegarlo en el fondo

- Se puede pegar un archivo de imagen elegido en la ventana de la gráfica.
- Podemos instalar los tipos siguientes de archivo: "*.jpg", "*.bmp", "*.ico", "*.emf", "*.wmf".
- Cuando esté pegado una imagen, Se tarda más en graficar.
No es recomendable que utilicen esta función con una computadora que no tenga capacidad de procesador.



Pegar la imagen que copiaron



Borrar la imagen



Ajustar la imagen al mismo tamaño que la ventana

- Cuando esté activado este botón, Se ajusta la imagen. Ajustar la imagen al mismo tamaño que la ventana.

Aplicación de esta función

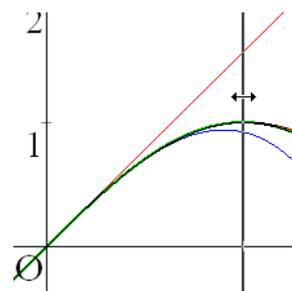
En nuestra vida, existen varios fenómenos y varios movimientos como ejemplos reales de las gráfica de las funciones matemáticas. Si tenemos las fotos de los ejemplos, podemos graficar sobre esas fotos al instalar como la imagen de la ventana de la gráfica. Será muy útil para comparar una gráfica de función y un ejemplo real.

Por ejemplo, ¿Qué le parece graficar una función cuadrática sobre una foto del movimiento parabólico

Tabla de [Herramientas]

Ventana de valores de función

Esta ventana sirve para comparar el valor de Y por el valor de X sobre varias funciones o varias expresiones. El dibujo derecho expresa el desarrollo de función trigonométrica por serie. Podemos confirmar cómo se acerca la serie a la función original.



La ventana de valor de función puede seguir abierta aunque hagamos alguna modificación, por ejemplo modificación de parámetro. Podemos averiguar la variación de valores de función dinámicamente.



Abrir ventana de valores de función

- Haga click en este botón  que está en la tabla de [Herramientas] para abrir la ventana.
- Cuando abra la ventana, una línea vertical sale en el área de gráfica. Esto significa el valor de X para calcular los valores de Y de las funciones.

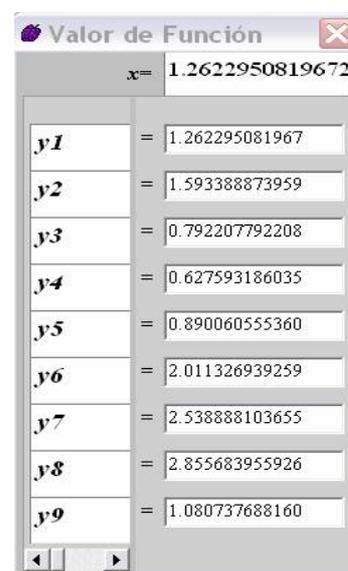
Cambiar el valor de x

Hay dos maneras

- Digitar el valor con la calculadora científica al hacer click en el área del hueco del valor de x.
 - Se puede digitar expresión además de número.
- Hacer drag en la línea vertical directamente.
 - Cuando la x esté dada por una expresión, no podemos cambiar de esta manera.

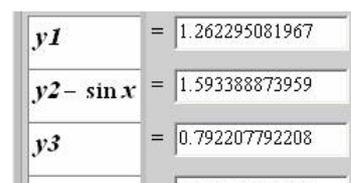
Botón para indicar línea

- "x=" que está arriba de la ventana, es botón. Si está activado este botón, no sale la línea vertical.



Modificar expresión

- En la condición inicial, salen de y1 a y9. Pero se puede cambiar cualquier expresión. Para cambiar la expresión, haga click en el área que sale la expresión. Luego el GRAPES indica la calculadora científica. Digite una expresión.

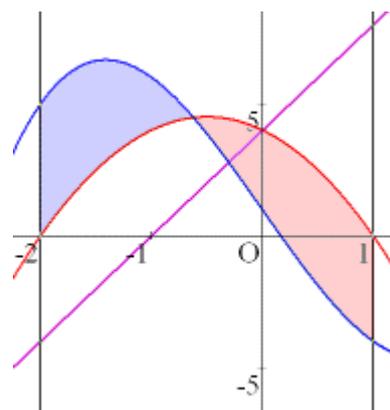


También se puede cambiar el ancho del área de indicación de expresiones y valores al hacer drag la línea de separador.

Ventana de integral definida

Sobre las funciones cuyo grado es menor o igual que 8, el GRAPES puede calcular integral sobre alguna de ellas. Pero cuando quiera usted calcular integral definida sobre otros tipos

de funciones, use esta ventana. El GRAPES calcula valor aproximado usando la regla de Simpson (Simpson's rule). Usted puede designar libremente por cuántas partes divide el área que quiera calcular los números. También se puede pintar las áreas que quiera integrar y se puede integrar la diferencia de dos funciones y la parte rodeada por funciones.



Indicar ventana de integral definida

- Para abrir la ventana de integral definida haga click  en la tabla de [Herramientas].
- Si abre la ventana de integral definida, salen dos líneas verticales en el área de gráfica para significar el límite inferior y el límite superior de integral. El GRAPES pinta el área que integre.

¡Ojo! No se puede indicar la ventana de valor de función y la ventana de integral definida al mismo tiempo.



Modificar los valores de límite inferior y límite superior de integral

Hay tres maneras como las siguientes.

- Después de hacer click al hueco de límite inferior y límite superior, Digitar los valores en la calculadora científica.
 - Se puede digitar expresiones matemáticas además de números.
- Hacer drag las líneas verticales de límite inferior y límite superior directamente.
 - Si el límite inferior y el límite superior están dados por expresiones matemáticas, no se puede cambiar los valores por esta manera.
 - Si están activados los botones de "límite inf." (límite inferior) y "límite sup." (límite superior) en la ventana de integral definida, no salen las líneas.

Botones para indicar

- Las partes de límite inferior y límite superior son botones. Se puede hacer click estas partes para indicar o apagar las líneas que significan límite inferior y límite superior.

Indicar área de integral

- Sobre las funciones que estén marcadas en la caja de "Indica." (Indicar), el GRAPES pinta la parte que integra.
- El GRAPES sólo indican las funciones seleccionadas en la caja de "Indica."

(Indicar), ello no influye al resultado de integral definida.

Integrar la diferencia de dos funciones

- El GRAPES puede indicar los resultados de integral definida de la diferencia de las dos funciones seleccionadas de todas las funciones que estén definidas
- El GRAPES indica todos los resultados de integral definida de las diferencias de todas las funciones definidas y la función que esté marcada en la caja de "Dif." (Diferencia).
- Si no quiere sacar diferencia, elija [0].



Cambiar integral definida y área

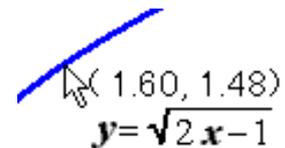
- Se puede calcular el área por añadir el signo de valor absoluto a la expresión cuando integre.
- Se puede calcular el área de la parte rodeada por las funciones por hacer click el botón de [Área].

Cambiar el número de divisiones

- Se puede cambiar el número de divisiones de la regla de Simpson. Designe un número par de los números desde 2 y hasta 200.

Indicar coordenadas y expresión

Se puede indicar las coordenadas y las expresiones de gráficas, al ubicar el cursor sobre las gráficas.



Indicar coordenadas

- Haga click en el botón para indicar coordenadas 
Bajo esta condición, cuando ubique el cursor sobre figuras o gráficas, aparecen las coordenadas donde ubique el cursor.
- Siempre se indica la coordenada del cursor debajo de la ventana de gráfica.



Indicar expresión

- Haga click en este botón 
Bajo esta condición, cuando ubique el cursor sobre una gráfica, aparece la

expresión de la

Marcador

Se puede marcar en el área de gráfica con la función "marcador" libremente.



Utilizar marcador



- Cuando haga click  en la tabla de [Herramientas], sale un menú de marcador.
Se puede elegir color y grueso.
- Se puede dibujar y escribir al seguir presionando el botón izquierdo del ratón (como drag).
- Cuando haga drag al seguir presionando el botón derecho del ratón, se puede borrar como borrador.
- Para borrar todos los dibujos, haga click .
- ¡Ojo! El GRAPES no guarda las cosas dibujadas por marcador en archivo.



Para presentación

Botón de indicación

Cuando dibujemos varias funciones al mismo tiempo, a veces queremos apagar una gráfica temporalmente.

Si usa este botón, puede cambiar, si se indica cada una de las gráficas (función, relación, objeto elemental, línea y polígono (figura conectada)) instantáneamente.

Botón de indicación

Cuando ubique el cursor sobre la parte izquierda de la expresión matemática, se destaca la parte del botón como lo muestra el dibujo derecho. Se le llama el botón de indicación.

No indicar gráfica

- Cuando haga click en el botón, éste está activado. En esta condición, El GRAPES no indica esta gráfica.

Cancelar no indicar

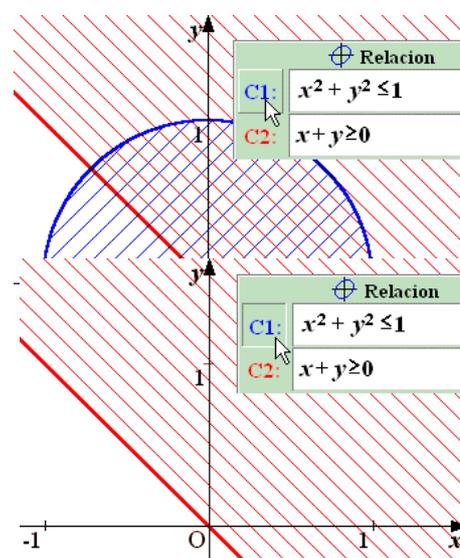
- Haga click otra vez. El GRAPES va a indicarla.

Indicar o no indicar imagen anterior y lugar geométrico

- Si hace click en el botón, puede cambiar, si se indica la imagen anterior de la función o el lugar geométrico de la función, además de la gráfica de la función.
- Cuando la función (especialmente relación) lleva la imagen anterior, es posible que tarde en cambiar la condición (si se indica la función).

Indicar o no indicar figura conectada

- Si apaga un punto de los puntos que compone una figura conectada, el GRAPES apaga la figura conectada.



Nota

Puede apuntar textos, expresiones, valores de expresiones en esta "Nota". Podemos utilizarlo para indicar datos sobre gráficas además de indicar explicaciones sobre

proyectos. Así, esta función nos da más utilidad.

Se puede escribir y realizar programas de proyecto en la "Nota".

También se puede escribir textos, expresiones, valores de expresiones en el label. Pero hay restricciones, por ejemplo se puede escribir sólo una línea e indicar sólo cerca de gráfica, etc.



Indicar ventana de la "Nota"

- Para editar texto, abra la ventana de la "Nota".
- Para abrir la ventana, hay tres maneras siguientes.
 - Hacer click en el botón de la "Nota" 
 - Hacer click derecho en el área de la "Nota" que está en el menú de datos, luego elegir "Editar Nota".
 - Cuando el GRAPES indique la "Nota", hacer click sobre esa "Nota".

Fórmula de la "Nota"

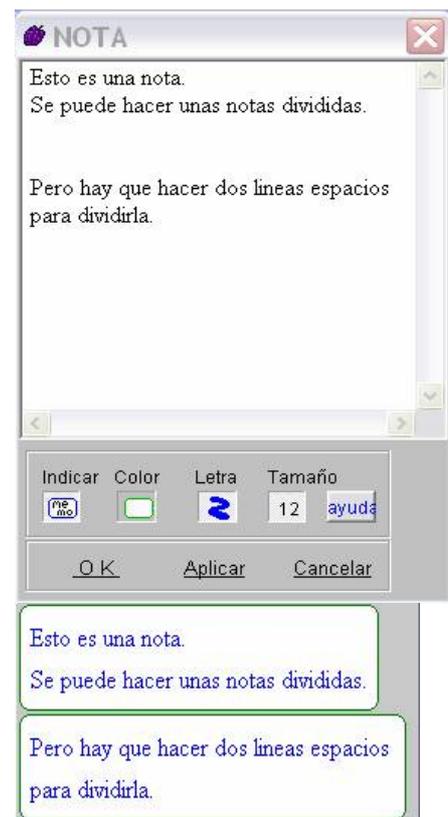
- Se puede escribir textos libremente.
- Se puede indicar **expresiones matemáticas y valores de expresiones**.
- Se puede poner **varias decoraciones para letras** incluyendo **el símbolo de vector**.
Si quiere saber detalles véase aquí

Indicar la "Nota"

- Primero digite en la ventana de la "Nota", luego designe forma de indicar, color de fondo, color de letras, tamaño de letras. Y luego haga click el botón [OK]. El GRAPES indica.
- Para aplicar los contenidos de la "Nota", haga click [Aplicar].
- El GRAPES indica la "Nota" en el menú de datos primero. Pero se puede mover libremente en la ventana de gráfica al hacer drag.

Dividir la "Nota"

- Cuando haya más o igual que dos líneas en la "Nota", el GRAPES lo reconoce e indica como están separados.



Leer la "Nota"

- Se puede leer sólo la "Nota" de los archivos guardados o del proyecto que esté elaborando.
 - Haga click derecho sobre la "Nota" o el botón de la "Nota". Entonces sale un menú. Puede elegir "Leer Nota en archivo".
 - También puede elegir así, [Archivo] → [Leer Nota].

Label

- El label de objeto elemental también puede indicar textos, expresiones y valores de expresiones como la "Nota".
- Se puede hacer un label para cada objetos elementales.
- Se puede escribir en el label sólo una línea.
- El label puede salir sólo cerca de objeto elemental.
- No se puede cambiar tamaño de letras ni color de letras.
(Se puede designar el tamaño de letras en la opción de escala).

Funciones complementarias

Imprimir [Archivo | Imprimir], (el botón)

- Se puede imprimir con los tres estilos siguientes.
 1. Copiar la parte del área de gráfica.
 2. Copiar la parte de todo el GRAPES.
 3. Imprimir gráficas con alta calidad.

Se puede imprimir las imágenes de gráficas con alta calidad por la resolución de impresora.

Sobre las resoluciones de datos,
Sobre funciones, la resolución en sentido horizontal depende de la resolución de pantalla, la resolución en sentido vertical depende de la resolución de impresora.

Sobre relaciones, las resoluciones en sentido horizontal y vertical dependen de la resolución de pantalla.

Sobre las condiciones menos las dos condiciones de arriba, las resoluciones dependen de la resolución de impresora.

Cuando utilice muchos lugares geométricos y relaciones, el GRAPES puede tardar mucho tiempo en imprimir.
- Se indica los tamaños de papel con la unidad de píxel en la ventana de designar, designe el tamaño de imprimir por el valor de píxel.
- Cuando copiamos, es mejor marcar "Ajustar tamaño" para imprimir con más calidad.
- Es posible que no se pueda imprimir por la impresora láser. Sobre la resolución, véase aquí

Copiar imagen, (el botón)

- Se puede copiar los contenidos que se indiquen en el área de gráfica en clipboard.
- Se puede indicar un menú de copiar al hacer click derecho en la parte derecha del botón (véase el dibujo derecho)

Se puede copiar como los datos de vectores al elegir "Gráfica (Alta calidad)" o "Gráfica (N/B).

Para más detalles, véase arriba "Imprimir".



Guardar imágenes (con continuidad)

Guardar imagen [Archivo | Guardar Imagen]

- El GRAPES guarda la gráfica que esté dibujada en la pantalla como archivo de imagen.
- Las formas de guardar son: bmp, Jpeg, WindowsMetafile, EnhancedMetafile. (Si guarda en la forma de bmp, el tamaño de archivo será muy grande.)

Guardar imágenes con continuidad [Archivo | Guardar Imágenes]

- Cuando haya algún cambio en la gráfica, el GRAPES guarda esos cambios. Entonces el GRAPES añade números seguidos a los nombres de los archivos. Le convendrá esta función para hacer animación de gif.

1. Digite un nombre de archivo para guardar en [Archivo | Guardar Imágenes].
2. Cada vez que hay algún cambio de gráfica, el GRAPES guarda archivos añadiendo números seguidos que son desde "001" y hasta "999" al nombre de archivo que nombraron.

3. Cuando esté usando esta función, el botón  sale en la barra de herramientas como el dibujo de abajo.



4. Si quiere terminar de guardar con continuidad, haga click en el botón .

Proyecto

Reiniciar proyecto [Archivo | Reiniciar] (El botón)

- Reiniciar todos los datos. Pero no se borran los datos que estén guardados.

Cambiar la condición inicial

[Opción | Poner Incumplimiento]

- Se puede designar la condición que hizo como la condición inicial.
- Los contenidos que se puede designar son:
 1. Los proyectos que se puedan guardar como archivo.
 2. El tamaño y la posición del menú de datos y la ventana de gráfica.
- El GRAPES guarda los contenidos que designe en los dos archivos "grapes.ini", "default.gps" que está en la carpeta que tiene el archivo "grapes.exe".
- Para reiniciar la condición inicial, elija [Opción | Reiniciar Incumplimiento] o borre los dos archivos "grapes.ini" y "default.gps".

Manejo de archivo [Archivo | Abrir, Guardar]

(los botones  y )

- Se puede guardar como un archivo el proyecto que hizo. Puede hacer una biblioteca de los archivos de los proyectos que hizo.
- Los archivos consisten en dos tipos, que son: "*.gps" de archivo para definir y "*.gpp" de archivo para imagen anterior. Cuando use el GRAPES, no es necesario de pensarlo. Pero si quiere mover archivos o cambiar nombre de archivos, hay que hacer misma operación con los dos tipos de archivos.
- Los datos principales de proyecto están guardados en el archivo para definir "*.gps". Por eso, si se pierde el archivo para imagen anterior "*.gpp", puede seguir haciendo su proyecto.
- Sobre el dato del papel del fondo, el GRAPES guarda sólo nombre de archivo. Por lo tanto, cuando ese archivo de imagen esté en la misma carpeta que "*.gps", estará válido. No se puede guardar los papeles del fondo que estén sacados por clipboard.

Relacionar archivo

Conexionar archive [Opción | Conexionar Archivo]

- Cuando haga esta operación, puede abrir el GRAPES sólo hacer doble click "*.gps".

Drag y Drop de archivo

- Por hacer Drag y Drop un archivo de "*.gps", puede abrir ese archivo.

Funciones convenientes

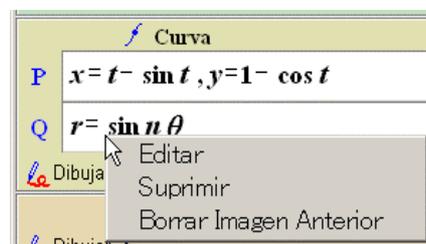
Interrupción de graficar

- Cuando tarde en graficar una relación, se puede interrumpir utilizando la tecla "F1".

Menú contextual

Menú en el panel de datos

- Cuando usted haga click derecho en las partes que salen expresiones matemáticas en el panel de dato, el GRAPES indica un menú con las opciones siguientes. 1. Editar la condición de esa expression (gráfica). 2. Suprimir esa expression (gráfica). 3. Borrar las imágenes anteriores de esa expression (gráfica).



Menú contextual en el área de gráfica

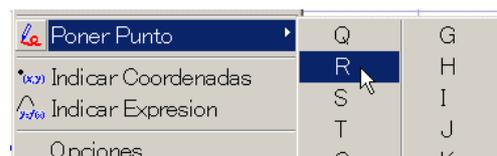
- Cuando el cursor esté en el área de gráfica, el GRAPES indica un menú al hacer click derecho.



Dibujar puntos con ratón

Poner puntos con ratón

- Cuando elija [Poner Punto] en el menú, se puede dibujar puntos fácilmente y designar el nombre de un punto.

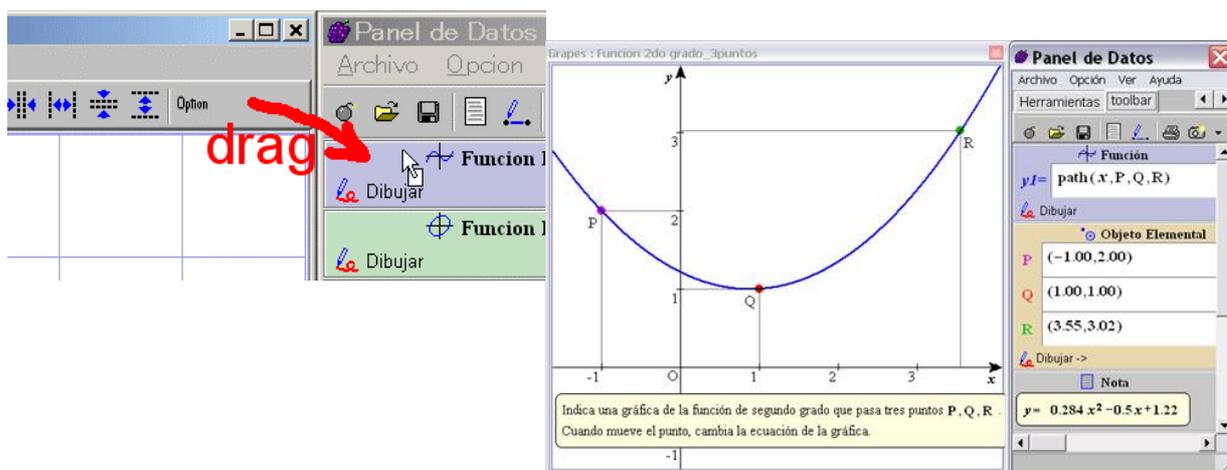


Ampliar área de gráfica

Se puede ampliar el área de gráfica al mover la barra de control.

Mover la barra de control al hacer drag

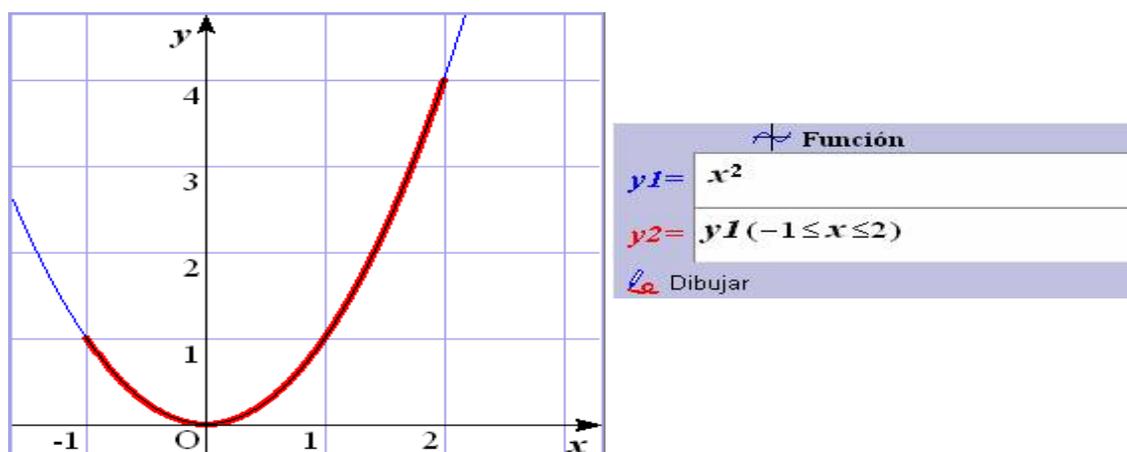
Se puede mover la barra de control en el menú de datos al hacer drag. Al hacerlo, desaparece la barra de la ventana de gráfica. Y se obtiene más espacio para indicar gráficas. Para que vuelva la barra en el área de gráfica, haga drag la barra al área de gráfica.



Limitación de dominio

Se puede limitar el dominio de las funciones, utilizando las operaciones comparativas y las operaciones lógicas.

Limitación de dominio



Está limitado el dominio de la función $y_1 = x^2$ por $(-1 \leq x \leq 2)$.

Utilización de las operaciones comparativas y las operaciones lógicas

Se puede limitar dominio y también se puede conectar varias funciones por utilizar los signos de desigualdad y los signos lógicos. Se puede graficar sólo las partes que las funciones satisfagan las condiciones dadas. Véase Operaciones o Ejemplos de descripciones

Forma de digitar expresiones

Elementos de expresión

Funciones que se ubican a la izquierda de variables

- \sin , \cos , \tan , Asin , Acos , Atan : funciones trigonométrica y sus funciones inversas
Se puede determinar el grado sexagesimal o el radián como la unidad de ángulo [Opción | Opciones de Función] en la barra de menú.
- \exp : Función exponencial (e^x)
- $\log(\text{base}, \text{resultado})$: Funciones logarítmicas. Cuando omitan digitar la base, la función es logaritmo común.
Se puede determinar uno de los dos logaritmos cuando omitan digitar la base en "Logaritmos" que está en [Opción | Opciones de Función]. En la condición inicial, está determinado el logaritmo natural.
- \ln : Logaritmo natural (Es disponible esta forma, aunque la calculadora científica no tiene un botón de "ln")
- $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$: Sqrt, Cbrt: Raíz cuadrada, Raíz cúbica.
- int , round : Esta función saca la parte de número entero de un número. (La misma función que el símbolo de Gauss), "Round" redondea número.
- frc : $\text{frc}(x) = x - \text{int}(x)$
- mod : Resto de división entre un número entero.
- abs , sign : Valor absoluto, Signo de un número
Se puede usar "[", "]" en vez de "abs". (Ej.: [x])
 $\text{sign}(\text{número positivo})=1$, $\text{sign}(\text{número negativo})=-1$, $\text{sign}(0)=0$
- $\text{nCr}(\quad, \quad)$: Combinación
Cuando digiten un número real en la parte de "n" o "r", el GRAPES redondea el número. Luego calcula la combinación.
- $\text{rnd}(x)$: Esta función resulta los números enteros aleatorios que son mayores o iguales que 0 y menor que x.
Cuando $x = 1$, la función resulta los números reales entre 0 y 1.
Cuando la variable sea un número real, el GRAPES redondea el número. Luego la función da números aleatorios.
- $\text{max}(x_1, x_2, \dots)$, $\text{min}(x_1, x_2, \dots)$: Valor máximo, Valor mínimo
Se puede meter más o igual que 1 y menos o igual que 20 de números o variables entre paréntesis por dividir con coma.
Estos órdenes sacan el valor máximo y el valor mínimo de todos los objetos válidos que están entre paréntesis respectivamente.
Ej.: $\text{max}(-2x, 2, x+1)$
- f , g , h , f_1 , f_2 : Funciones de usuario
- f' , g' , h' , f_1' , f_2' : Derivadas de funciones de usuario
- f'' , g'' , h'' , f_1'' , f_2'' : Segundas derivadas de funciones de usuario
- F , G , H , F_1 , F_2 : Integrales indefinidas de funciones de usuario. Pero estas funciones tienen que ser funciones polinomiales y cuyos grados son menos o igual que 9.

(Cuando sus grados sean más que 9, el GRAPES no calcula las funciones)

$F(x)$: La integral de $f(x)$ que tiene 0 como el límite superior y "x" como el límite inferior.

- $\det(x_1, y_1, x_2, y_2)$ ^{¡nota!} : Determinante $x_1y_2 - x_2y_1$
- $\text{area}(x)$: $\text{area}(0)$ saca el valor mínimo de x. $\text{area}(1)$ saca el valor mínimo de y, $\text{area}(2)$ saca el valor máximo de x, $\text{area}(3)$ saca el valor máximo de y.
- $\text{Step}(\text{Parámetro})$: Esta función da el valor del ancho de aumentar y disminuir que esté indicado en el área de parámetro sobre el parámetro designado.
Se usa esta función para la programación de proyecto principalmente.

Funciones sobre funciones

- $\text{cof}(\text{Grado}, \text{Expresión})$: Esta función saca el coeficiente del término cuyo grado esté dado entre paréntesis. (La expresión tiene que ser polinomio y tiene que ser la cuyo grado es menor o igual que 6)
Ej. : $\text{cof}(2, 4x^3 + 5x^2 - 6x + 1) = 5$
No se puede digitar una función que incluya la variable x en la parte de Grados entre paréntesis.
- Σ : Sum : La suma de una serie. (Ej.: $\Sigma(m, 1, 5, m^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$)
Véase aquí Gramática.
- \int : Igr : Integral definida (Variable para integrar, Límite inferior, Límite superior, Expresión) : (Ej.: $\int(t, 1, 5, t^2)$)
Véase aquí Gramática.

Funciones que resultan vector

- (x_1, y_1) : Vector que tiene x_1 como el elemento de x y y_1 como el elemento de y.
- $\text{mid}(P_1, P_2)$: Punto medio de los dos puntos dados.
- $\text{mid}(P_1, P_2, m, n)$: Punto que divide el segmento P_1P_2 a razón de m entre n.
 - Si usted sabe la fórmula de punto que divide un segmento, no necesitará usar esta función.
Preparé esta función para que utilicen los estudiantes de primer año de bachillerato japonés en la rama de geometría. También las funciones de abajo servirán bastante en la rama de geometría.
- $\text{rot}(P)$: Vector después de que gire el vector P por 90° .
- $\text{rot}(P, t)$: Vector después de que gire el vector P por t radianes(grados).
La unidad de ángulo es radián en la condición principal. Para cambiar a grado sexagesimal, designe [Grado] en "Unidad de Ángulo" de la tabla de [Opción | Opciones de Función].
- $\text{rot}(P, A, t)$: Punto después de que gire el punto P por t radianes(grados) alrededor del punto A.
- $\text{Intr}(A_1, A_2, B_1, B_2)$: Intersección de las dos líneas A_1A_2 y B_1B_2 .
- $\text{perp}(P, A, B)$: Intersección de la línea AB y su perpendicular que pase el punto P.

- $C_{centr}(P1,P2,P3)$:Circuncentro de un triángulo.
- $I_{centr}(P1,P2,P3)$: Incentro de un triángulo.
- $H_{centr}(P1,P2,P3)$: Ortocentro de un triángulo.
- $G_{centr}(P1,P2,\dots,Pn)$: Baricentro de un polígono que tiene n vértices.

Funciones que tienen vectores como variable y resultan números reales

- $P.x$: Elemento de x del vector P . $P.y$: Elemento de y del vector P.
- $|P|$: Longitud del vector P. (Digite así : "[P]"). Es decir, el mismo signo que valor absoluto)
 - Ej. : $[P-(2,3)]$: La distancia entre los dos puntos P y (2,3).
 - Cuando digiten [PQ], significa la longitud del segmento PQ.
- $len(P1,P2)$: Distancia de los dos puntos dados.
- $det(P1,P2)$: Valor de determinante.
 - Es $det((a,b),(c,d))$ el determinante de una matriz de 2×2 que consiste en los 4 elementos a,b,c,d. Pero se puede digitar así : $det(a,b,c,d)$.
- $path(x,P1,P2, \dots ,Pn)$: Función que pasa los n puntos dados cuyo grado es (n-1).
 - Era "pas" anteriormente. (un error ortográfico (^ ^ ^))
- $arg(P)$: Valor del ángulo que forman el vector P y el eje de x.
 - Se puede designar uno de 0 a 2π y $-\pi$ a π como dominio en [Opciones de Función].
- $arg(P,Q,R)$: El ángulo PQR.
 - Cuando no digiten Q, o sea $arg(P,R)$, significa $arg(P,O,R)$.
 - La forma (omitida coma) " $arg(PQR)$ " era disponible para la versión 6.16 y sus anteriores. Pero no se puede usar esta forma en la versión 6.20. Si usted quiere usar archivo antiguo, corrija esta parte.
- $Ir_{ad}(P1,P2,P3)$: Radio de círculo inscrito.
- $Cr_{ad}(P1,P2,P3)$: Radio de círculo circunscrito.

Tratamiento de funciones de usuario y vectores

- Se puede definir una función de usuario como que dé vectores como su valor.
 - Ej. : $f(x) = xP + (1-x)Q$
- La función de usuario puede tener vector como su variable.
 - $f(2,3)$ significa calcular la función f por $x=2,y=3$.
 - $f((2,3))$ significa sustituir la variable por el vector (2,3), pero resulta el mismo valor que $f(2,3)$.
 - Se distinguen sustituir por dos valores y sustituir por un vector estrictamente. (Excepto "arg")
 - Por ejemplo, $\log(2,8)=3$, pero $\log((2,8))$ es un error gramático.
 - $rot(2,3)$ es un error gramático, pero $rot((2,3))=(-3,2)$.
 - Ej. : Cuando $f(x,y) = x + y$, $P=(2,3)$, entonces $f(P) = 2 + 3 = 5$.
 - Ej. : Cuando $f(x,y) = xA + yB$, $P = (2,3)$, entonces $f(P) = 2A + 3B$.

Funciones que se ubican a la derecha de variables

- **!** : Factorial
Cuando digiten un número real, GRAPES calcula factorial con el número redondeado del número dado.
- **°** : Transformación de grado sexagesimal a radián. (Cuando esté designado [Grado] en "Unidad de Ángulo", no se puede utilizar esta función.
- **.x** : Elemento de x de un vector.
Ej.: $(2,3).x = 2$
- **.y** : Elemento de y de un vector.
- **.r** : Radio de un círculo(objeto elemental).

Funciones que no tienen variable

- π , e : Coeficiente de la circunferencia, Base de logaritmo natural.
- y1 hasta y20 : Valores de funciones.
No se puede usarlas para definir funciones de usuario y elementos de figuras.
- P, Q, etc. : Coordenadas de figuras.
- R, θ (Sólo para escribir una relación): $r = \text{len}(x,y)$, $\theta = \text{arg}(x,y)$

Operaciones

- **+**, **-**, *****, **/** : Cuatro operaciones.
Se puede usarlas para vector.
Suma y resta de vectores, multiplicación escalar de vector.
- **"•"** : Producto interior de dos vectores.
- **^** : Elevación por un número real
Cuando digiten este signo detrás de una función trigonométrica, GRAPES reconoce como una elevación de valor de la función.
(Ej. : $\sin^n x = (\sin x)^n$)
- **>**, **≥**, **<**, **≤**, **<>**, **=** : Operaciones comparativas.
Éstas resultan el valor 1 cuando la comparación es cabal y si es falso, resultan "error".
(Ej. : Para $y=(x>2)\sin x$, el GRAPES grafica $y=\sin x$ para el dominio $x>2$.)
- **and**, **or**, **not** : Operaciones lógicas
Éstas resultan el valor 1 cuando es cabal y si es falso, resultan "error".

Paréntesis ()

El paréntesis tiene tres funciones.

- La operación que esté entre paréntesis tiene prioridad de calcular.
- Expresa un vector cuando coloquen dos números reales entre paréntesis dividiendo con coma.
Ej.: $(2 , 3)$

- Expresa dominio de una función.
Excepciones: Funciones trigonométricas y sus funciones inversas, funciones exponenciales, funciones logarítmicas, raíz cuadrada y raíz cúbica.

Parámetro

- $a, b, c, d, k, m, n, p, q, s, t, u, v, \theta$
No se puede usar θ como parámetro en una relación y una función de usuario. (Porque se usa como una función que exprese ángulo.)
Para usar θ como un parámetro en estas funciones, hay que determinar en la opción de gráfica.

Variable

- x, y
Se expresan "x" y "y" los elementos de un objeto elemental.
 - r, θ
En funciones de usuario y relación, r y θ se definen como los siguientes : $r = \text{Sqrt}(x^2+y^2)$, $\theta = \text{arg}(x,y)$.
 - X
Se expresa punto (x,y) . (Se usa en funciones de usuario y relación)

Datos de vector

- X : Punto (x,y)
- O : Origen $(0,0)$
- $P, Q, R, S, T, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N$: Objetos elementales y puntos sobre curvas.

Gramática

Prioridad

La expresión matemática se realiza (calcula) desde la izquierda en principio. Sobre la parte de paréntesis, la expresión que esté en el paréntesis tiene prioridad de calcular.

Excepto las dos reglas arriba, se calcula por el orden siguiente.

1. Funciones que se ubican a la izquierda de la variable
2. Elevación
3. Multiplicación (El caso sin el símbolo de multiplicación)
4. Funciones que se ubican a la derecha de la variable
5. Multiplicación y División

6. Suma y resta
7. Operación comparativa, Operación lógica

Sobre variable de funciones

1. Sobre las funciones que se ubican a la derecha de la variable, es su variable hasta que aparezca una de cuatro operaciones, operaciones lógicas, operaciones comparativas, espacio, funciones que se ubican a la derecha de la variable. (En este caso, el término "variable" incluye las variables que tienen la forma de funciones matemáticas, además de las variables normales como "x" y "y". Por ejemplo, para la función $y=f(2x+1)$, estoy tratando "2x+1", como la "variable" de la función "f", aunque la variable es "x", prácticamente.)
 Ej. : $\sin a \cos x^2 + 1 = (\sin a)(\cos x^2) + 1$
 $\sin a(x+1)^2 + 1 = \sin(a(x+1)^2) + 1$
 $\sin a(x+1)^2 + 1 = (\sin a)(x+1)^2 + 1$
2. Cuando haya un cálculo de elevación detrás de una función trigonométrica, GRAPES lo reconoce como una función.
 Ej. : $\sin^{2n} 2x$ significa una función " \sin^{2n} " y $2x$ es como su variable. (Es la misma expresión que $(\sin 2x)^{2n}$)
3. Las variables, de funciones que se ubican a la izquierda de la variable y elevación, son: la letra que sale antes de la función, valor y paréntesis.
 Ej. : $2n! = 2(n!)$, $2ax^2 = 2a(x^2)$
4. Sobre las funciones de usuario f, g, h, f1, f2, la parte que está dentro de un par de paréntesis, es su variable.
 Ej. : $f(\cos 2x + 1)^2 = (f(\cos 2x + 1))^2$

Si es difícil distinguir la relación de prioridad, ponga paréntesis o espacio para aclararla.

Ejemplos para digitar

Ejemplos y sus interpretaciones. Las desigualdades que salen en "Explicaciones" significan los órdenes de prioridad.

Ejemplo	Interpretación	Explicación
$\sin 2x$	$\sin(2x)$	Multiplicación sin su símbolo > Funciones que se ubican a la derecha de la variable
$\sin x / 2$	$\sin x / 2$	Funciones que se ubican a la derecha de la variable > Cuatro operaciones
$\sin x + 2$	$(\sin x) + 2$	Funciones que se ubican a la derecha de la variable > Cuatro operaciones

$\sin(x+2)$	$\sin(x+2)$	Paréntesis tiene prioridad
$\sin(x+1)^2$	$\sin((x+1)^2)$	Elevación > Funciones que se ubican a la derecha de la variable
$\sin^2 x$	$(\sin x)^2$	Relación excepcional entre elevación y funciones trigonométricas
$\sin 2ax$	$\sin(2ax)$	Letras sin espacio es la variable de la función
$\sin 2a x$	$(\sin 2a)x$	Separación por espacio
$2x^3$	$2*(x^3)$	Funciones que se ubican a la izquierda de la variable > Multiplicación sin su símbolo
$1/2x$	$1/2x$	Multiplicación sin su símbolo > División
$1/2 x$	$(1/2) x$	Separación por espacio
$4+x > 1-2x$	$(4-x) > (1-2x)$	Cuatro operaciones > Operaciones lógicas

Complemento 1 : Tratamiento de valor absoluto

Para poner un símbolo de valor absoluto, use "[" y "]". (Digite como "[x+2]")

El GRAPES interpreta o reconoce el valor absoluto como una función, que se ubican a la derecha de la variable (por ejemplo "[x+2]" reconoce como "abs(x+2)").

Complemento 2 : Sobre área de la variable de funciones

Nosotros obedecemos varias reglas irregulares sobre área de la variable de funciones.

Por ejemplo,

$f(a+1)x$ significa $(f(a+1))x$. Pero

¿ $\sin(a+1)x$ significa $(\sin(a+1))x$ o $\sin((a+1)x)$?

¿ $\sin x^2$ significa $(\sin x)^2$ o $\sin(x^2)$?

¿ $\sin ax$ significa $(\sin a)x$ o $\sin(ax)$?

¿ $\sin a(x+1)$ significa $(\sin a)(x+1)$ o $\sin(a(x+1))$?

¿ $\sin x \cos y$ significa $(\sin x)(\cos y)$ o $\sin(x \cos y)$?

Me parece que no hay una regla para aclarar cuáles son correctos.

El GRAPES decide el área de la variable según las reglas siguientes para obedecer sentido común en lo posible.

- Sobre las funciones que se expresen con paréntesis normalmente (como $f(x)$, $\int(x)$ etc.), son variables desde el primer paréntesis y hasta el segundo paréntesis.
- Sobre las funciones que no se expresen con paréntesis normalmente (como $\sin x$, $\log x$ etc.), el GRAPES obedece las reglas siguientes.
 1. Separar los cuatro elementos (espacio, cuatro operaciones, operaciones lógicas operaciones comparativas) y la función.
 2. Cuando no haya paréntesis, el GRAPES reconoce que una función no es la

variable de otra función.

Vamos a aplicar las reglas de arriba a los ejemplos siguientes.

$$\sin(\mathbf{a+1x}) = \sin((\mathbf{a+1})\mathbf{x})$$

$$\sin\mathbf{x^2} = \sin(\mathbf{x^2})$$

$$\sin\mathbf{ax} = \sin(\mathbf{ax})$$

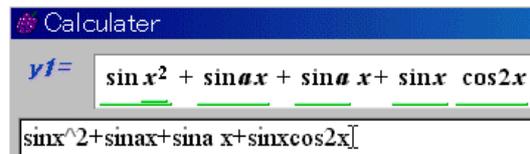
$$\sin\mathbf{a(x+1)} = \sin(\mathbf{a(x+1)})$$

$$\sin\mathbf{x}\cos\mathbf{y} = (\sin\mathbf{x})(\cos\mathbf{y})$$

- Mejor usar paréntesis cuando haya una posibilidad de confundir.

¿Le parece difícil? Pero no se preocupe.

- GRAPES subraya las áreas de la variable de funciones con líneas verdes en la calculadora científica.



Complemento3 : Sobre Σ (Suma de serie)

Digite como lo siguiente; Σ (Parámetro, Valor inicial, Valor último, Expresión).

Ej. : $\Sigma(m,1,5,m^2) : 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$

Condiciones limitadas sobre Σ

Hay unas condiciones limitadas como las siguientes. Sobre las condiciones 2 y 3, ya que el GRAPES no chequea la gramática tenemos que chequearla muy bien. Si no obedece las condiciones siguientes, saldrán resultados mal.

1. Se puede usar las letras siguientes solamente como parámetro; a, b, c, d, m, n, p, q, s, t, u, v, θ , k
2. No se puede usar las expresiones que incluya la x como valor inicial ni valor último.
Ej. : $\Sigma(k,1,x,k^2)$ ---No es válida esta expresión.
Ej. : $\Sigma(k,1,n,k^2)$ ---Es válida.
3. No se puede poner las funciones de y1 a y9 que tengan parámetros ni los elementos de objetos elementales que tengan el parámetro en una expresión de Σ al mismo tiempo.
Ej. : Cuando sea $y1=kx$, no es válido $\Sigma(k,1,5,y1)$.
Ej. : Cuando sea $f(x)=kx$, es válido $\Sigma(k,1,5,f(x))$.
Ej. : Cuando sea $y1=x^2$, es válido $\Sigma(k,1,5,k+y1)$.
4. No se puede poner una expresión de Σ en otra expresión de Σ directamente.
Ej. : No es válido $y1=\Sigma(n,1,10,\Sigma(k,2,n,k^2))$.
Ej. : Cuando sea $f(x)=\Sigma(k,2,n,k^2)$, es válido $y1=\Sigma(n,1,10,f(x))$.

Complemento4 : Sobre \int (Integral definida)

- Digite lo siguiente; \int (Variable para integrar, Límite inferior, Límite superior, Expresión).
- El GRAPES utiliza La regla de Simpson (Simpson's rule) para integrar. Se puede designar ancho de tramos en la ventana de "Integral definida".

Condiciones limitadas sobre \int

Hay unas condiciones limitadas como las siguientes. Sobre las condiciones 2 y 3, ya que GRAPES no chequea la gramática tenemos que chequearla muy bien. Si no obedece las condiciones siguientes, saldrán resultados mal.

1. Se puede usar x, y además de todos los parámetros para la variable de integral. Pero no se puede usar función integral de "x" ni "y" como un elemento de objeto elemental.
2. No se puede usar las funciones que incluyan la x como límite inferior ni límite superior.
3. No se puede poner las funciones de y1 a y9 que tengan variables integrales o elementos de objetos elementales que tengan la variable en una expresión de \int al mismo tiempo.
4. No se puede poner una expresión de \int en otra expresión de \int .

Ejemplos

Ejemplos que pienso que usamos comúnmente.

Función polinomial

- $y1=2x^3+4x^2-3x+5$ (Digite así: $x^3 +4x^2 -3x+5$)
- $y2=2x^5+(2/3)x^4-4x^3+x^2+6x-8$

Función trigonométrica

- $y1=3\sin 2x$
- $y2=3\sin(x/2)$
- $y3=3\sin^2(x-\pi/2)$ (Digite así: $3\sin^2(x-\pi/2)$)

Valor absoluto

- $y1=[2x-3]$

Función logarítmica

- $y_1 = \log(2, x)$ ($\log_2 x$)
- $y_2 = \log(x)$ (Logaritmos comunes o logaritmos naturales, se puede omitir paréntesis)
- $y_3 = \ln(x)$ (Logaritmos naturales, se puede omitir paréntesis)

Función exponencial

- $y_1 = \exp(x)$
- $y_2 = 2^x$

Determinar dominio

- $y_1 = (x > 0)x^2$
- $y_2 = (x < 0)x$ or $(x \geq 0)x^2$
- $y_3 = (t < x < t+1) x^2$

Valor máximo, valor mínimo

- $y_1 = \text{Max}(x, 2)$ (El valor máximo de x y 2)
- $y_2 = \text{Min}(f(x), f(x+1), f(1))$ ($0 < x < 1$)
En el dominio $0 < x < 1$, esta expresión saca el valor mínimo de $f(x)$, $f(x+1)$ y $f(1)$. En otro dominio, ésta saca el valor mínimo de $f(x)$, $f(x+1)$.

Suma de serie

- $y_1 = \sum_{k=0}^n x^k / k!$ (La suma hasta el $(n+1)$ término del desarrollo de Taylor de $\exp(x)$)

Función de path y coeficientes de polinomios

- $y_1 = \text{path}(x, A, B, C)$ (La función cuadrática que pasa los tres puntos A, B y C)
- $\text{cof}(2, y_1)$ (El coeficiente de x^2 de la función y_1)

Utilización de parámetro

- $y_1 = ax^2 + bx + c$
- $P(t - \text{sint}, 1 - \text{cost})$ (La gráfica de cicloide)

Citar funciones

- $y_1 = \sin ax$, $y_2 = \cos bx$, $y_3 = y_1 + y_2$

Utilización de funciones de usuario / ria

- $f(x) = x^2$, $y_1 = f(x-a) + b$
- $f(x) = x^3 - ax$, $y_1 = f'(x)$ (Derivada)
- $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $y_1 = F(x)$ (Integral indefinida)
- $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $y_1 = F(1, x)$ (Integral definida de 1 a x)
- $f(x, y) = 2xy - 3x + y$, $y_1 = f(x, a)$ (Función que tiene dos variables)
- $f(x) = xA + (1-x)B$, $P = f(t)$ (Punto que está sobre el segmento AB, éste divide el segmento a razón de $1-x$ entre x)
- $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, $Q = f(P)$ (Cuadrado de un número complejo)

Citar elementos de figura

- $P(2, 3)$, $y_1 = (x - P.x)^2 + P.y$

Relaciones

- $x^3 + y^3 = 3xy$
- $r^2 = \cos 2\theta$

Aplicar relaciones para definir lugar geométrico

- $[XA] = [XB]$ (Mediatriz de dos punto A y Punto B)
(X significa el punto (x, y))
- $[XF] = \text{len}(X, (a, y))$ (Parábola cuyo foco = F y cuya directriz es $x = a$)
(El lado derecho significa la distancia entre punto $X(x, y)$ y punto (a, y))

Programación

Sobre la programación de proyecto

Se puede controlar los parámetros, imágenes anteriores y lugares geométricos al programar.

Características de la programación en el GRAPES

- Se puede hacer programa en "Memo".
- Se puede controlar los siguientes por programar.
 - Sustitución de parámetro.
 - Sustitución de los elementos de objetos elementales y curvas, por valores concretos. (No se puede sustituir funciones).
 - Controlar imágenes anteriores.
 - Graficar (basándose en valores de parámetros).
- El idioma de la programación no tiene variables locales, puede tratar todos los 13 parámetros libremente.
- Es disponible el orden para dar condición "if then else", los órdenes para poner repetición "for next" y "while wend".
- Se indica un botón para cada programa. Haga click para realizar el botón del programa.
- Se puede realizar automáticamente, cuando cambie algún elemento en el panel de datos.

La gramática de la programación

Forma de escribir para la programación de proyecto

Escribir programa

- Escribamos programas en la "Nota".
- El GRAPES reconoce las oraciones que estén en la "Nota" y las oraciones que comiencen con "#" como un programa.
 - En la "Nota", A las líneas que comiencen con "#" se les llama las líneas de programa, A las otras se les llama las líneas de nota.
- El GRAPES reconoce las líneas seguidas de programa como un programa.
- Para un programa que consiste en varias líneas, el GRAPES las realiza de arriba hacia abajo.
- Para poner más de 2 programas en una nota, haga una línea de nota entre los

programas o un separador "# ---".

Ej.1	Ej.2	Ej.3	Ej.4
# //programa	# //programa1	//programa1	# //programa1
# a := 1	# a := 1	# a := 1	# a := 1
# calc	# draw	# draw	# draw
# ---	# ---		Una línea de nota
	# //programa2	# //programa2	# //programa2
	# b := 2	# b := 2	# b := 2
	# draw	# draw	# draw
	# ---	# ---	Fin

Indicar programa

- Se indica sólo la primera línea de programa en la tabla de datos como un botón en el área de la "Nota".
Es recomendable escribir una nota que exprese el contenido del programa (Ejemplo, nombre del programa) en la primera línea.
- Cuando el orden "HideScript" esté escrito en la primera línea, no se indica ese programa.

Realizar e interrumpir programa

- El GRAPES indica un botón para realizar programa en el área de la "Nota". Haga click.
- Cuando haga click derecho una nota o botón de la "Nota", se indica una lista del programa. Se puede realizar el programa al elegir en la lista.
- El GRAPES realiza programas de la primera línea de una en una.
- Para interrumpir los programas, presione la tecla F1.
- Cuando un programa tenga "OnChange", se realiza automáticamente por la condición.

Forma de escribir

- Se puede poner sólo un orden en una línea.
- No se puede escribir un orden dividido por dos líneas.
- No importa escribir las palabras sólo para programar (For, Next, While, Wend, ClrAImg, etc.) con mayúscula o minúscula.
- La gramática de programa de: parámetros, elementos de figura, expresiones, depende de la del GRAPES. Por eso hay que escribir parámetros con minúscula y

hay que escribir fielmente las palabras, como "Pi".

- Hay que dejar un espacio entre una palabra y otra.
- Se puede poner cualquier número de espacios después de "#" que esté en cabeza de la línea.
- Se puede poner notas después de "//".
- **GRAPES chequea si hay un error gramático e indica un mensaje cuando encuentre un error. Pero el GRAPES no puede encontrar errores perfectamente. Por eso puede no indicar un mensaje aunque haya errores.**

Gramática de programación

- **Oración para sustituir**
 - **Parámetro := Expresión**
La expresión tiene que ser la que el GRAPES puede calcular.
Cuando la expresión no tenga un valor concreto al sustituir, el GRAPES no realiza la sustitución.
Es posible sustituir la variable "y".
Ej. : $a := b^2+3$
 - **Elemento de figura:= Expresión**
Se sustituye el elemento por el valor de la expresión.
Ej. : $P.x := \sin t$
 $P := (2,3)$
 - **Inc(Parámetro, Expresión)**
 - **Dec(Parámetro, Expresión)**
Aumentar y disminuir el valor del parámetro el mismo valor que el de la expresión.
Cuando omite expresión, el valor del parámetro se aumenta y se disminuye uno a uno.
Ej. : $\text{Inc}(a, \text{Pi}/4)$, $\text{Inc}(a)$
- **Oración de condición**
 - **If oración de condición Then oración de consecuencia para realizar**
 - **If oración de condición Then oración de consecuencia para realizar Else oración de otra consecuencia para realizar**
 - **If oración de condición Then**
oración de consecuencia para realizar (Se puede poner varias líneas)
Endif
 - **If oración de condición Then**
oración de consecuencia para realizar (Se puede poner varias líneas)
Else
oración de otra consecuencia para realizar (Se puede poner varias líneas)
Endif
- **Oración para repetir**
 - **While oración de condición**
oración de consecuencia para realizar (Se puede poner varias líneas)
Wend

Mientras esté valida la condición, el GRAPES realiza la oración que está escrita entre While y Wend repitiendo.

- **For Parámetro := Expresión1 To Expresión2 Step Expresión3**
oración de consecuencia para realizar (Se puede poner varias líneas)

Next

For...Next tiene la misma función que la oración siguiente.

Parámetro := Expresión1

While Parámetro ≤ Expresión2

oración de consecuencia para realizar

Inc(Parámetro, Expresión3)

Wend

Cuando omita la Expresión3, el valor del parámetro se aumenta y se disminuye uno a uno.

- **Orden para dibujar y para calcular**

- **Draw**

El GRAPES grafica por el valor del parámetro en ese momento.

Cuando no necesite usted lugar geométrico, use "**Draw:**".

El GRAPES renueva todas las indicaciones en pantalla menos notas.

- **Calc**

El GRAPES grafica por el valor del parámetro en ese momento.

Cuando no necesite usted lugar geométrico, use "**Calc:**".

El GRAPES renueva todas las indicaciones en pantalla. (Por eso puede dibujar con mucha velocidad.)

Cuando necesite renovar todas las indicaciones, use **Refresh** o **Draw**.

- **Refresh**

Este orden sirve para renovar imágenes anteriores.

Se usa para indicar imágenes anteriores cambiadas y lugares geométricos cambiados por el orden de **Calc**.

- **RefreshMemo**

Este orden sirve para renovar notas.

- **Orden para cambiar dominio y recorrido del área de gráfica**

- **SetArea(x1,y1,x2,y2)**

Se indica el área cuya diagonal esté definida con los dos puntos (x1,y1), (x2,y2) en toda el área de gráfica.

- **Borrar y Poner imagen anterior**

- **ClrAImg**

Este orden sirve para borrar todas las imágenes anteriores dibujadas.

- **ClrAImg(Nombre de la figura)**

Este orden sirve para borrar la imagen anterior.

Se puede poner varias figuras entre paréntesis y dividir las con coma.

Ej. : ClrAimg(y1,C2,A,L8)

Se borran la función y1, la relación C2, la figura A y el segmento L8 por este orden.

- **SetAImg**

Este orden sirve para dibujar las imágenes anteriores, de todas las figuras dibujadas.

- **Orden para indicar y apagar cada figura**
 - **ShowObj(Nombre de figura)**
Este orden sirve para indicar figuras.
Se puede poner varias figuras entre paréntesis y dividir con coma. (Es la misma gramática que **HideObj**, **InvShowObj**)
Ej. : ShowObj(y1,C2,A,L8)
Se indican la función y1, la relación C2, la figura A y el segmento L8 por este orden.
 - **HideObj(Nombre de figura)**
Este orden sirve para ocultar figuras.
 - **InvShowObj(Nombre de figura)**
Este orden sirve para cambiar condición de figuras. Oculta las figuras dibujadas e indica las figuras.
Tiene la misma función al hacer click el botón de indicación.
- **Orden para interrumpir proceso**
 - **Wait(Expresión)**
Este orden sirve para interrumpir proceso por el tiempo determinado con la expresión. La unidad de tiempo es milésima de segundo.
 - **Pause**
Este orden sirve para detener proceso de programa hasta que digiten nuevamente.
- **Condición de realizar programa automáticamente**
 - **On Nombre de elemento Change**
Se pone este orden en la primera línea o en la segunda.
Cuando cambie el elemento determinado, se realiza el programa automáticamente.
Los elementos que podemos determinar son: parámetros, figuras, funciones de usuario y las funciones.
Ej. : On a,b,f Change (Cuando cambie uno de los parámetros a, b y la función f, se realiza el programa)

Leer los programas

Abrir un programa de proyecto

- Se puede abrir los programas de los proyectos que estén guardado como un archivo.
- El GRAPES memoriza los programas en la "Nota". Por eso puede abrir los programas usando Abrir la "Nota". Entonces no se cambia los datos sobre funciones y parámetro menos la "Nota".

Complemento

FAQ

Varias consultas que realizaron los usuarios y las usuarias del GRAPES.

Sobre este archivo

Descongelar archivo

- La última versión del GRAPES es archivo que se descongela automáticamente. Después de bajar el archivo, si hace doble click, se hace la carpeta "GRAPES" y desarrollan archivos. Se puede hacer, colocar la carpeta "GRAPES" dondequiera.
- Para iniciar el GRAPES, haga doble click "grapes.exe" que está en la carpeta "GRAPES".

Cambiar condición inicial

- Cuando haga click [Opción | Poner Incumplimiento] en la barra de menú, el GRAPES memoriza la condición como la condición inicial. También memoriza el tamaño de la ventana y su ubicación.
- Ejemplo:
Elegir "Grado sexagesimal" para dibujar una función trigonométrica y cambiar el dominio y el recorrido a $-100 < x < 100$, $-2 < y < 2$. Luego hacer click [Opción | Poner Incumplimiento].

Colores de indicar en pantalla

- 8 bitcolor (256 colores) no es suficiente para usar la capacidad del GRAPES. Ya que son pocos colores para el GRAPES, no saldrán las gráficas como imágenes anteriores.
- Por eso quiero que usen el GRAPES con más de 16 bit color.
 - No hay problema de usar 32 bit color para el GRAPES 6.20 y sus versiones posteriores.

Sobre funciones

Logaritmo natural y logaritmo común

- Cuando digite funciones logarítmicas, digite así; **log(base, resultado)**

- Cuando omitamos la base, la función significa uno de logaritmo natural o logaritmo común. Podemos elegir uno, logaritmo natural o logaritmo común en la tabla de "Función" que está en la opciones. Está determinado el logaritmo natural en la condición inicial.
- **Podemos digitar $\ln(x)$ como logaritmo natural.** Ya que no existe una tecla " $\ln(x)$ " en la calculadora, digítelo con teclado.



Radián y grado sexagesimal

- Está determinado el radián en la condición inicial. Se usa radián para las funciones trigonométricas y sus funciones inversas.
- Para cambiar al grado sexagesimal, haga click "Opción". Luego abra la tabla de "Función". En la tabla puede elegir el grado sexagesimal (véase el dibujo derecho).
- El GRAPES recalcula y redibuja las funciones trigonométricas y sus funciones inversas por este cambio.



Sobre gráfica

Cómo dibujar lugar geométrico

- Para dibujar lugar geométrico de una vez, digite las expresiones de x , y con parámetro en el área de Curva, luego decida el dominio del parámetro.
- También podemos dibujarlo por la manera siguiente; Definir un punto con parámetro, luego dibujarlo por cambiar el parámetro.

Cómo cambiar color y grueso de segmento

- Cuando haga click derecho sobre un segmento, el GRAPES indica un menú contextual. En el menú, puede elegir Propiedades de figura conectada. En la propiedad, podemos cambiar color y grueso.
- O cuando haga click , Se indica el área de "Línea y Polígono". Luego se puede indicar La propiedad de figura conectada por hacer click la parte del segmento que quiere cambiar en el área de "Línea y Polígono".

Cómo dibujar área común de varias áreas

- Digite como " $(x^2+y^2<4)$ and $(x+y<0)$ ".
- Véase Área de desigualdad en el manual de usuarios y usuarias.

Gráficas de relaciones que salen mal

- Para una función $f(x,y)$, el GRAPES encuentra un punto (x,y) que satisfaga $f(x,y)=0$ por averiguar el signo de $f(x,y)$. Por eso en el caso que el signo cambie delante y detrás de un punto pero el valor no sea 0, como la función de tangente y las funciones fraccionarias (es decir función discontinua), el GRAPES podría dibujar un límite inexistente.
- Mejor digitar una función continua.
Ejemplo: Para graficar la función $x = 1/y$, digite $xy = 1$.

Atención cuando dibujemos gráficas de ecuación polar en la forma de relación

- Cuando digitemos una función discontinua, el GRAPES puede dibujar líneas inexistentes de límite. Mejor digitar una función continua.
Ejemplo: Para graficar $r = 1/(1-2\cos\theta)$, digite $r(1-2\cos\theta) = 1$.
- Cuando digitemos ecuación polar en la forma de relación, El valor del ángulo θ cambia discontinuamente, cuando el radio pasa por la parte de números positivos del eje x. Por eso, es posible que salga mal la gráfica, depende de la función.
- El radio "r" no puede ser número negativo. Si usted quiere definir radio de número negativo, dibújelo como lo siguiente. Ejemplo: Para la ecuación polar $r=f(\theta)$, dibuje las dos ecuaciones siguientes, $r=f(\theta)$ y $-r=f(\theta-\pi)$.

Cómo indicar una cinta para expresar dominio

Hay dos maneras.

- Utilizar dominio de desigualdad.
 - Digite como $a \leq x \leq b$ en el área de [Relación].
El GRAPES indica el dominio pintando con líneas oblicuas o otros diseños (se puede elegir un diseño).
- Utilizar cuadrado de "Línea y Polígono".
Aunque cuesta definirla, se indica con velocidad muy alta.
 1. Primero dibuje una línea vertical A: $x=a$ (en "Objeto Elemental").
 2. Dibuje el punto B(b,1). No importa digitar cualquier número como la coordenada de y.
 3. Trace una perpendicular del punto B a la línea A.
 4. Elija "Cuadrado" como diseño de figura. Luego elija un color y un diseño de pintar.
 5. Ya sale una cinta vertical,
 6. Cambie diseño de B de "Punto" a "línea horizontal" en la propiedad de B.

Cómo dibujar triángulos y cuadrados

1. Primero dibuje los vértices. (Puntos de objeto elemental o centro de círculo)
2. Conecte dos de los vértices como dibujar un segmento.
3. Añada los otros vértices en la ventana de propiedad de "Línea y Polígono".

Otros

Cómo indicar una expresión en el área de gráfica

- Se puede indicar cualquier letra por utilizar Label de la "Nota" y objeto elemental.
- Sobre tipo de letras, se usa "TimesNewRoman" para letras normales.
- Se puede indicar expresiones y valores de expresión.
- El tamaño de letras de label es igual que el de letra de escala (Determine en Opción de escala).

Cómo indicar los coeficientes que estén definidos con parámetros en números concretos

Por ejemplo sobre $y=ax+b$, cuando $a= 2$, $b= 3$, para que se indique $y=2x+3$ haga lo siguiente.

Abra la ventana de la "Nota".

Digite $y = !\{a\}x+!\{b\}$.

Se indica la expresión que tiene números concretos en "a" y "b" como coeficiente. (Los números son los valores de parámetro "a" y "b" de esa condición)

Si el grado de la expresión es menor o igual que 6, se indica por digitar así: $?\{Expresión\}$.

En el ejemplo de arriba digite así : $?\{ax+b\}$

Cómo dibujar puntos en el área de gráfica libremente

Para dibujar puntos en el área de gráfica y sus imágenes anteriores, haga lo siguiente.

- Haga click derecho donde quiera poner un punto. Sale un menú al hacer click derecho. Elija [Poner Punto].
(Suponemos que sea "P" este punto)
- Haga click en la parte de "P" en "Objeto elemental" para indicar la propiedad de "P". Marque la parte de "Img. Ante." (En este momento, se puede cambiar el color y el tamaño del punto)
- Haga drag el punto "P" en el área de gráfica con el ratón.
Al hacerlo, se mueve el "P" y se queda una imagen anterior de "P" donde estaba "P".

Cómo pegar las gráficas en otro software

Copiar la gráfica dibujada en clipboard y pegar a otro software.

- Primero copiar la gráfica. Hay dos maneras siguientes.

1. Haga click en el botón de copiar que está en la barra de herramientas en la tabla de datos.
 2. Indique Menú contextual al hacer click derecho en la ventana de gráfica. Luego elija " Copiar".
- Se puede pegar gráficas con buena calidad de imagen.
Se puede copiar una gráfica con mucha suavidad como dato de vector por hacer click [Gráfica (alta res.)] o [Gráfica (B/N)] después de hacer click en el botón "▼" que está al lado del botón de copiar en la tabla de datos.
 - Luego ubique cursor en la parte de otro software donde quiera pegar la imagen. Y péguela por hacer click "Pegar".
Normalmente iniciamos para pegar imágenes por menú "Editar". Véase el manual del software que utilice usted sobre la operación para pegar imágenes.

Cuando no pueda imprimir gráfica...

Es posible que no podamos imprimir una gráfica con alta calidad de imagen dependiendo de la impresora (especialmente impresora láser).

Aunque son diferentes cómo resolver esa situación depende de la impresora, pruebe las maneras siguientes.

- Intentar dibujar todos las gráficas con color negro. (Elija [Gráfica (B/N)])
- Intentar elegir el modo de imagen en [Propiedades].
- Intentar con la escala de gris (más oscuro) en [Propiedades].

Redondea extremo de línea punteada y línea discontinua

- Se puede elegir una de las dos formas, que son "Redondo"  y "Plano" , como la forma de extremo de línea. Está determinado "Redondo" originalmente. Para cambiar la forma, elija "Gráfica" que está en "Opción".
- Cuando elijamos "Plano", se aplica a la impresión del GRAPES. Pero cuando hagamos "Copiar" y "Pegar" a otro software, el extremo será redondo. (¿Por Windows? No se conoce la causa)
Ya que tienen espacios diferentes "Redondo" y "Plano", es mejor elegir "Redondo" para imprimir con calidad cuando pegamos a otro software.

Dibujar y imprimir con "Plano"	
Pegar con "Plano"	
Dibujar, imprimir y pegar con "Redondo"	

Cuando no funcione un programa de proyecto anterior...

Es posible que no podamos imprimir una gráfica con alta calidad de imagen dependiendo de la impresora (especialmente impresora láser).

Aunque son diferentes cómo resolver esa situación depende de la impresora, pruebe las maneras siguientes.

- Intentar dibujar todas las gráficas con color negro. (Elija [Gráfica (B/N)])
- Intentar elegir el modo de imagen en [Propiedades].
- Intentar con la escala de gris (más oscuro) en [Propiedades].

Sobre derivada

El GRAPES usa La interpolación de Lagrange (Lagrange interpolation) para funciones cuyo grado es 5 para calcular derivada.

$$\frac{f^{(7)}(c)}{70} d^6$$

El límite de errores es $\frac{f^{(7)}(c)}{70} d^6$ teóricamente. d es el ancho de recorrido cuando se usa la interpolación de Lagrange.

Por eso, cuando $f(x)$ sea un polinomio cuyo grado es menor o igual que 6, no aparece ningún error teóricamente.

Sobre integral indefinida

Se puede calcular funciones polinomiales cuyo grado es menor o igual que 8. No aparece error. Cuando una función tenga más de 8 grados, GARPES no puede calcular integral.

Sobre integral definida

El GRAPES usa la regla de Simpson (Simpson's rule) para calcular integral definida en la

$$\frac{f^{(4)}(c)(b-a)^5}{288n^4}$$

ventana de "Integral definida". El límite de errores es igual a

teóricamente. (Cuando dividan entre $2n$ un tramo que tanga $(b-a)$ de ancho.)

Epílogo

Cómo desinstalar el GRAPES

Sólo se necesita eliminar la carpeta que tiene el archivo del GRAPES.

Obligación de usuarios y usuarias

Quisiera que utilizaran el GRAPES muchas personas y me mandaran varias impresiones y críticos para mejorarlo más. Cuando usted lo utilice, por favor envíeme sus impresiones, opiniones y también enseñeme en qué situación lo usa. Me gustaría que me enviara usted los datos de sus clases.

Condición para repartir

El GRAPES es **software gratis**.

Se puede copiar y entregar a otras personas libremente.

Pero cuando usted entregue a otras personas, entregue estos tres archivos (grapes.exe, muestras, este manual) juntos.

No es necesario que me avise, cuando quiera entregar el GRAPES a otras personas.

La dirección de la última versión

<http://www.criced.tsukuba.ac.jp/grapes/es/>

Derechos de autor

KATSUHISA TOMODA tiene derechos de autor del GRAPES y este manual.

KATSUHISA TOMODA

tomodak@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

平成 16 年度
文部科学省国際教育協力拠点システム構築委託事業
派遣現職教員支援事業 報告書
関数グラフソフト GRAPES の多言語化と
国際教育協力活動での利用

平成 17 年 2 月 15 日

課題代表	礪田 正美
編 集	宮川 健
発 行	筑波大学教育開発国際協力研究センター 〒305-8572 茨城県つくば市天王台 1-1-1 Tel: 029-853-7286 Fax: 029-853-7288 e-mail: grapes@criced.tsukuba.ac.jp URL: http://www.criced.tsukuba.ac.jp/grapes/
印 刷	前田印刷株式会社 筑波支店
