MÓDULO 4

ASPECTOS DIDÁCTICO-CURRICULARES

Competencia: "Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de Gestión de datos e incertidumbre".

- **Gráficos estadísticos**
- **Medidas estadísticas**
- **Probabilidad**

MÓDULO 4

ASPECTOS DIDÁCTICO-CURRICULARES

Sesión 1

Se proponen actividades de reflexión y reconocimiento de los tipos de tarea que se requieren para lograr el aprendizaje orientado a la interpretación de gráficos. Asimismo, se presentan lecturas para reconocer en los medios de prensa un recurso para desarrollar la estadística. Por otro lado, se plantean actividades diversas que involucran el uso de recursos y materiales necesarios para desarrollar la competencia.

Sesión 2

Se proponen actividades para la resolución de situaciones relacionadas con medidas de tendencia central y dispersión. Asimismo, los participantes reflexionarán sobre el proceso de resolución de problemas relacionados a las medidas estadísticas. Finalmente, se plantean situaciones problemáticas que permiten reconocer estrategias útiles para la enseñanza y el aprendizaje de la estadística.

Sesión 3

Se propone una lectura relacionado a los diversos enfoques de la probabilidad. Asimismo, se plantean actividades orientadas a la comprensión de los tipos de problemas y las técnicas y recursos probabilísticos más idóneos para dichas tareas. Asmimismo, se desarrollan actividades que integran aspectos de la didáctica, lo curricular y lo disciplinar relacionado a la probabilidad.

Dirección Regional de Educación de Lima Metropolitana

Jr. Julián Arce N.° 412 (Ref. cdra. 4 de Av. Canadá) - Santa Catalina, La Victoria.

http://www.drelm.gob.pe/

Equipo de elaboración:

- Pedro David Collanqui Díaz
- Jaime Luis Soto Castro
- Kasper Michael Gutiérrez Ibaceta

Lima, Perú

El módulo de formación curricular y didáctica para docentes está organizado de la siguiente manera:

Duración del módulo:

- 15 horas de modalidad presencial.
- 15 horas de modalidad no presencial.
- 3 sesiones.

Temas a trabajar por sesión:

- Lectura: "La prensa en las aulas de matemáticas"
- Desarrollo de situaciones: propósito de la encuesta y tipos de preguntas
- Análisis: representaciones gráficas estadísticas
- Estrategias de aprendizaje y enseñanza relacionadas con la estadística (Utilizando sesiones de la JEC e ítems de la evaluación PISA)

- Lectura: "Comprensión y propiedades del promedio"
- Desarrollo de situaciones: recomendaciones para la enseñanza de la estadística
- Análisis: los medios de prensa y el aprendizaje de la estadística
- Estrategias de aprendizaje y enseñanza relacionadas con la estadística (Utilizando sesiones de la JEC e ítems de la evaluación PISA)

- Lectura: "Carácter multifacético de la probabilidad"
- Análisis: recursos para resolver problemas de probabilidad
- Estrategias de aprendizaje y enseñanza relacionada con la probabilidad. (Utilizando sesiones de la JEC e ítems de la evaluación PISA)

Productos esperados:

Organizador visual

Reflexión de trabajo grupal

Problemas resueltos

Sesión 1

Contenido

- Lectura: “La prensa en las aulas de matemáticas”
- Desarrollo de situaciones: propósito de la encuesta y tipos de preguntas
- Análisis: análisis de representaciones gráficas estadísticas
- Estrategias de aprendizaje y enseñanza relacionadas con la estadística (Utilizando sesiones de la JEC e ítems de la evaluación PISA)

Competencias que desarrollará el docente

- Expresa ideas relacionados al uso de la prensa para desarrollar aprendizajes estadísticos.
- Reconoce las características de la encuesta y los tipos de preguntas.
- Analiza las representaciones gráficas elaboradas y las dificultades de aprendizaje reconocidas en ellas.
- Propone maneras de solucionar un problema y los desarrolla en equipos de trabajo a fin de definir planteamientos didácticos específicos.

1.1 La prensa en el aula de matemáticas

En el contexto actual estamos realizando todas nuestras actividades en una **sociedad de la comunicación**; en las prácticas educativas, la escuela no puede estar ajena a este espacio, donde se reconoce el tránsito de gran información y el desarrollo permanente de conocimientos. Por ello, las actividades docentes exigen precisamente reconocer los recursos principales con los que se divulga la información.

La educación debe preparar a los estudiantes para que sean capaces de controlar el medio social y cultural en el que se desenvuelven. Para ello es importante conocerlo, de ahí la importancia de fomentar el interés por los temas de actualidad.

El periódico y otros medios impresos son algunos de los recursos que deben ser adecuados para promover aprendizajes en la escuela porque permiten que los estudiantes trabajen con la lectura de gráficas, fomentan una actitud crítica y reflexiva respecto a la información, estimulan la investigación y enseñan a compartir la información con los demás.

Esto involucra leer el periódico con ojos matemáticos. Por ejemplo:[1]

- **En titulares**
  En ellos se puede localizar todas las expresiones relacionadas con **estadística** (frecuencias, valores medios, comparaciones y relaciones entre características, etc.) de los titulares de los periódicos.

- **En noticias**
  - Valorar el espacio dedicado a noticias en distintos periódicos, calculando el porcentaje de páginas con noticias respecto al total (porcentaje de páginas con noticias), el porcentaje de noticias respecto al número de páginas con noticias (índice de noticias por página) y el porcentaje de noticias respecto al número total de páginas (densidad total de noticias).
  - Valorar la información estadística respecto al contenido de la noticia, indicando si aporta datos nuevos, si complementa las afirmaciones, si se escogen tablas y gráficos adecuados, etc.
  - Comparar la misma noticia publicada en distintos medios de comunicación.
  - Elaborar tablas o gráficos a partir del texto de una noticia.
  - Completar huecos en una noticia basándose en los datos que se aportan en la misma noticia en forma literal o bien en tablas y gráficos.
  - Analizar informaciones deportivas en las que se adjunten datos numéricos.

- **En anuncios**

  - Valorar la oferta y la demanda de empleo en los anuncios por palabras, durante varios días.
  - Valorar el número de páginas con anuncios y el espacio que ocupan en una revista dominical.

- **Agendas**

  - Estudio de los juegos de azar.
  - Estudio de la evolución de los datos meteorológicos a lo largo de un tiempo.
  - Estudio de la correlación existente entre las temperaturas previstas y las reales.

- **Opinión**

  - Localizar artículos de opinión en los que haya referencias estadísticas o traten de estudios estadísticos. Ejemplo: editoriales, informe PISA.
  - Comparar el número de editoriales, artículos y cartas de opinión publicados en distintos medios a lo largo de una semana.
  - Resumir los temas de las cartas al director durante un determinado periodo de tiempo y valorar así qué problemática preocupa a los ciudadanos.

- **Tablas y gráficos**

[1] Tomado de Sonsoles Blázquez (s/f). *Estadística a través de la prensa*. Material de enseñanza. Valladolid: CFIE Valladolid.

- Clasificar los distintos tipos de gráficas estadísticas que aparecen en las distintas secciones.
- Lectura de gráficos, valoración de la elección del gráfico.
- Comparar la información de tablas o gráficos de distintos periódicos y valorar su diseño.
- Seleccionar un pictograma y elaborar el gráfico de barras correspondiente.
- Elaborar tablas a partir de gráficos y viceversa.
- Buscar posibles errores en los gráficos que se presentan o elaborar gráficos manipulados para ofrecer una visión distinta a la expuesta.
- Calcular parámetros estadísticos a partir de tablas.

Actividad. Haciendo uso de revistas y periódicos, elabore un mapa mental con el que exprese las características que debemos de reconocer en los medios de prensa para trabajar la estadística. Asimismo, haciendo uso del material disciplinar, reconozca los tipos de variables cualitativas y cuantitativas.

1.2 Propósito de la encuesta y tipos de preguntas

A continuación se muestran cuatro situaciones a partir de ellas, plantear:

- Propósito de una investigación.
- Población o muestra a evaluar.
- Elaborar una encuesta.
- Procesar la información haciendo uso de la hoja de cálculo.

Situación N.° 1[2]

OMS: al día mueren 44 peruanos por consumo de tabaco

Domingo 1 de junio del 2014 | 07:20

Esta sustancia produce 55 males, de los cuales 17 son diversos tipos de cáncer, señala el Ministerio de Salud.

Alarmante cifra. Al día, 44 peruanos mueren por enfermedades relacionadas al consumo de tabaco, según la Organización Mundial de la Salud (OMS). En nuestro país, el cigarrillo es la segunda droga más consumida por la población después del alcohol.

Carlos Farías, presidente de la Comisión Nacional Permanente de Lucha Antitabáquica (Colat), afirmó que un reciente estudio concluye que nuestro país es uno de los menos recaudadores de la región.

"Los precios de los cigarrillos son de los más cómodos. Se trata de 1,8 dólares en promedio, cuando en otros países están entre 3 y 4 dólares", dijo.

Situación N.° 2[3]

Peruanos prefieren el rock nacional de hace 20 años

Más de la mitad de los *tracks* de rock que buscan los usuarios locales en la plataforma fueron lanzados entre 1980 y 1999.

[2] Peru21 (2014). "OMS: al día mueren 44 peruanos por consumo de tabaco". *Peru21*. Lima, 1 de junio de 2014. Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://peru21.pe/actualidad/oms-al-dia-mueren-44-peruanos-consumo-tabaco-2185820>

[3] Alayo Orbegozo, Fernando (2015). "Spotify: Peruanos prefieren el rock nacional de hace 20 años". *El Comercio.* Luces. Lima, 24 de julio de 2015. Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://elcomercio.pe/luces/musica/spotify-peruanos-prefieren-rock-nacional-hace-20-anos-noticia-1828019>

Hace unos días revelamos cuán antigua es la música que escuchamos regularmente los peruanos en Spotify. El resultado fue sorprendente: pese a que no existe una emisora radial de por medio, nos seguimos deleitando con canciones que han sido lanzadas hace casi una década.

Para dicho cálculo nos basamos en el "mapa musical" que publicó la plataforma musical, donde se incluyen las cien canciones que definen a los usuarios de cada localidad alrededor del mundo. En el caso de Perú, están disponibles las preferencias de Lima y Arequipa.

En el análisis descubrimos que, respecto a los géneros musicales, el rock y sus derivados (*folk*, *indie*, etc.) son los de mayor representatividad entre los peruanos que utilizan Spotify con 42 canciones incluidas en la lista. Le siguen el latín / tropical —que incluye a la cumbia, el reggaetón, y el *urban*— con 22 *tracks* y la salsa con 15.

Situación N.° 3[4]

Fútbol peruano: ¿qué equipo tiene más hinchas en el Perú?

Una compañía de estudio de opinión pública quiso resolver la gran interrogante y estos fueron los resultados. ¿Alianza Lima o Universitario de Deportes?

Alianza Lima no puede recibir mejor noticia para enfrentar a Melgar este sábado por el torneo Apertura. De acuerdo a una encuesta realizada por la compañía CPI, es el club con mayor número de simpatizantes en el Perú por encima de su clásico rival, Universitario de Deportes.

Según el estudio de opinión pública de CPI, que fue realizado en mayo, Alianza Lima concentra 39,9 % de hinchas en el país. Mientras que en el caso de Universitario de Deportes, 28,9 %. Sporting Cristal, por su lado, registra el 16,3 %.

Si bien aparece por detrás de Alianza Lima y Universitario de Deportes, Sporting Cristal tiene un motivo para sonreír. Los celestes han ido incrementando su cantidad de seguidores en los últimos cuatro años. De 11,8 en el 2012 ahora tiene 16,3.

Situación N.° 4[5]

MINCETUR: turismo registra crecimiento en 7 % por feriados largos

Este fin de semana la preferencia de los viajeros fue el centro del país.

Sábado, 2 Mayo, 2015 - 13:06 0 Comentarios Economía

[4] Depor.com (2015). "Fútbol Peruano: ¿qué equipo tiene más hinchas en el Perú?". *Depor.* Fútbol peruano. Lima, 31 de julio de 2015. Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://depor.com/futbol-peruano/alianza-lima-universitario-deportes-sporting-cristal-hinchas-cpi-1049675>

[5] Radio Nacional (2015). "MINCETUR: Turismo registra crecimiento en 7 % por feriados largos". *Radio Capital.* Economía. Lima, 2 de mayo de 2015. Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://www.radionacional.com.pe/informa/economia/mincetur-turismo-registra-crecimiento-en-7-por-feriados-largos>

Un crecimiento entre 6 y 7 por ciento del turismo se ha registrado debido a los feriados largos por fiestas, afirmó la titular del Ministerio de Comercio Exterior y Turismo (MINCETUR), Magali Silva.

Informó que en lo que va del año se registró un crecimiento de 11 % en el turismo receptivo, en comparación al mismo periodo del año pasado. "Hemos visto que para este fin de semana largo se han movilizado 800 000 personas, estos feriados largos están creciendo alrededor de 6 y 7 por ciento, lo cual son divisas para la economía, que genera empleo y moviliza los negocios".

Ideas importantes

Los propósitos que debe cumplir la encuesta[6]

Las encuestas deben cumplir dos propósitos:

El primero es el de traducir los objetivos de lo que se quiere averiguar en preguntas específicas. Cada pregunta debe transmitir a la persona o al grupo al que se encuesta la idea o ideas que recoge el objetivo, lo que se pretende conocer; para cada pregunta deberá recogerse una respuesta susceptible de análisis, de manera que los resultados satisfagan los objetivos de la encuesta. Las preguntas deberán formularse de manera que la respuesta refleje exactamente la posición de la persona o del colectivo a la que va dirigido.

El segundo propósito de la encuesta es ayudar al entrevistador a provocar motivaciones en el encuestado, para que transmita la información requerida. Debe ayudar a crear las circunstancias para que el encuestado se comunique plena y libremente.

En la formulación de una encuesta se siguen ciertas normas que ayudan a asegurar que la información recogida sea significativa:

1. La primera norma se refiere a la elección del lenguaje, es decir, que el vocabulario y la sintaxis (construcción de las expresiones, los conceptos) ofrezcan la mejor oportunidad para transmitir las ideas, completa y exactamente, entre el entrevistador y su interlocutor.
2. El lenguaje de la encuesta, debe parecerse mucho al del entrevistado. Por esto es clave tener claro el grupo al que va dirigida la encuesta. Se pueden crear preguntas con términos que las personas no entiendan y es muy probable que por vergüenza no pregunten y escojan cualquier respuesta. Esto alterará los resultados y la información que se obtenga no será válida y llevará a que se trabaje con base en necesidades que la población no tiene.
3. Es importante que la encuesta se empleen los términos que contengan los puntos que los entrevistados deban aportar sobre el tema en cuestión. Al respecto, es esencial situarse en la misma situación en el que se encuentra el entrevistado; ponerse en la perspectiva del sujeto para diseñar las preguntas en función de éste.
4. Para la formulación de una buena encuesta, es necesario ofrecer un conjunto de respuestas que satisfagan las normas del entrevistado acerca de lo que es socialmente correcto.
5. Las preguntas deben limitarse a una sola idea o a un solo concepto.

[6] Tomado parcialmente de FiloCosta (s/f). *¿Cómo elaborar encuestas?* Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://blocs.xtec.cat/filocostaillobera/files/2012/09/encuestas.pdf>

6. El orden consecutivo de las preguntas nos permite que éstas sean más lógicas para la persona interrogada. Toda entrevista bien elaborada, debe facilitar el paso de una pregunta a otra; lo que a menudo hace que el interrogado se anticipe mentalmente a la pregunta siguiente, porque le parece que lógicamente sigue en el tema.
7. El encadenamiento de las preguntas puede también determinarse por lo que se denomina el **efecto embudo**. Esto es, hacer primero la pregunta más general o menos restringida y posteriormente las preguntas más restrictivas o específicas, de lo general a lo particular. En ello hay que considerar que las primeras preguntas provocan las motivaciones iniciales para que el entrevistado participe más a fondo.
8. El tiempo para responder las encuestas no deberá tomar más de 30 minutos, preferiblemente aún menos tiempo.

Tipos de preguntas para las encuestas[7]

Según la contestación que admitan tenemos lo siguiente:

a) **Preguntas abiertas.** Son aquellas que solo formulan la pregunta, sin establecer categorías de respuesta, el entrevistado responde lo que cree adecuado y se extiende todo lo que desee. Se deben utilizar muy poco en las encuestas porque después de la encuesta hay que cerrarlas y luego estandarizarlas.

b) **Preguntas cerradas.** Son aquellas en las que el entrevistado solo tiene que elegir la respuesta que más se acerque a su opinión.

- Elección única: solo puede ser elegida una opción de entre las opciones planteadas en la pregunta. Son preguntas excluyentes entre sí.
    - Dicotómicas: son preguntas que se responden con un "Sí" o con un "No", o en su defecto "No sabe", "No contesta" o "No responde".
    - Politómicas: también conocidas como categorizadas, presentan varias alternativas para que el encuestado elija la más conveniente.
- Elección múltiple: se utiliza cuando las opciones de respuesta no son excluyentes entre sí.
- Ranking: consiste en jerarquizar las diferentes respuestas ordenándolas según considere el encuestado. Por ejemplo, por orden de preferencia.
- Escala: se utiliza para evaluar el grado de intensidad o sentimiento de una característica o variable que se está midiendo.
    - Numérica: la característica se evalúa numéricamente. Pueden ser escalas de 1 a 10, de 1 a 5, etc. Por ejemplo, "¿Qué te pareció la visita? Gradúala de 1 a 10, donde 1 es la menor expresión y 10 la máxima".
    - Nominal: en vez de números, estos son sustituidos por palabras o frases. Por ejemplo, "¿Qué te pareció la visita? 'Me gustó mucho', 'Me gustó', 'No me gustó', 'No me gustó nada'" o "¿Vas al cine? 'Muchas veces', 'A veces', 'Casi nunca', 'Nunca'".
    - Likert: la escala de Likert es muy utilizada en las encuestas y su uso contiene una gran utilidad para medir actitudes. Esta escala se diferencia con el resto en que no solo medimos una variable sino varias que tienen que estar relacionadas entre sí. En próximos artículos será mencionada con más detenimiento.

Según su contenido:

a) Identificación: sitúan las condiciones en la estructura social. Ej.: edad, sexo, profesión.

b) Acción: tratan sobre las acciones de los entrevistados. Ej.: ¿va al cine? ¿Fuma?

c) Intención: indagan sobre las intenciones de los encuestados. Ej.: ¿va a votar?

[7] Adaptado de E-encuestas (s/f). "Tipos de pregunta en la encuesta". Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://www.e-encuesta.com/blog/2015/tipos-de-pregunta-en-la-encuesta/>

d) Opinión: tratan sobre la opinión de los encuestados sobre determinados temas. Ej.: ¿qué piensa sobre...?

e) Información: analizan el grado de conocimiento de los encuestados sobre determinados temas.

f) Motivos: tratan de saber el porqué de determinadas opiniones o actos.

Según su función en el cuestionario:

a) Filtro: se utilizan mucho en los cuestionarios para eliminar a aquellas personas a las que no les afectan determinadas preguntas; es decir, que marcan la realización o no de preguntas posteriores.

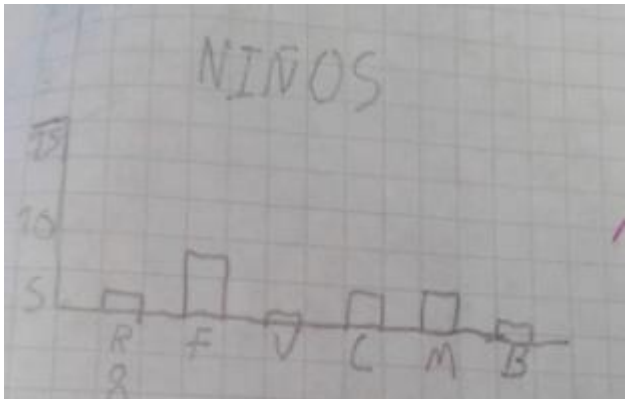
b) Batería: todas las preguntas tratan sobre un mismo tema y siempre deben ir juntas en el cuestionario en forma de batería, empezando por las más sencillas y luego las más complejas. Esto se denomina **embudo de preguntas**.

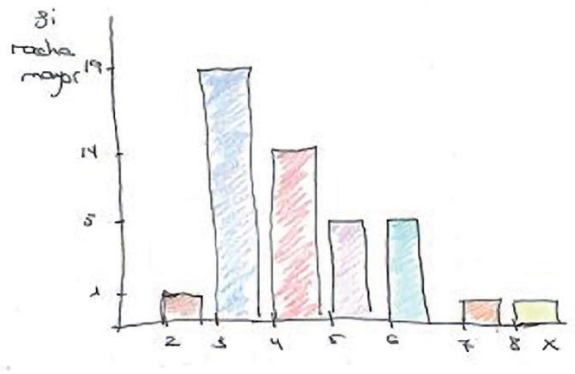
c) De control: se utilizan para comprobar la veracidad de las respuestas de los encuestados; normalmente lo que se hace en estos casos es colocar la misma pregunta pero redactada de forma distinta (las preguntas deben estar separadas una de otra).

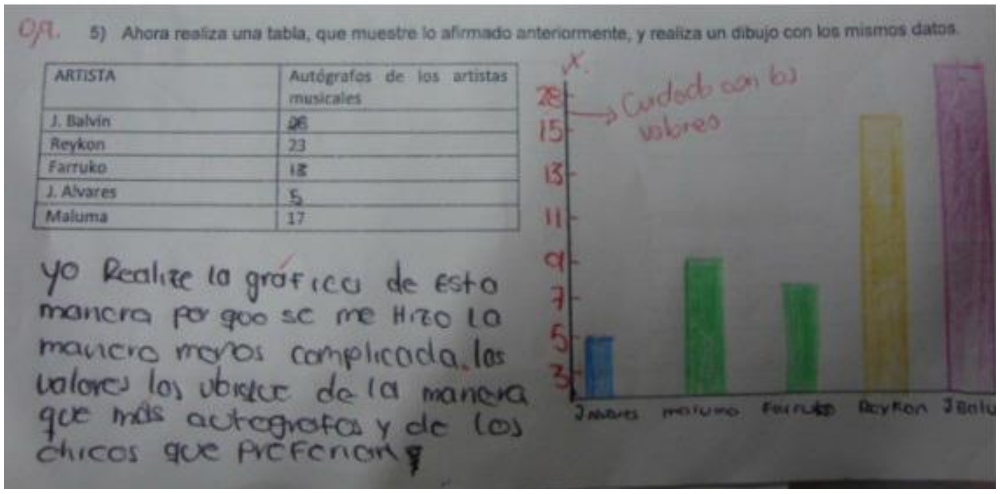
1.3 Análisis de representaciones gráficas estadísticas[8]

A continuación se muestra representaciones gráficas estadísticas elaboradas por estudiantes de entre 10 y 14 años. Observa cada caso y comparte tus apreciaciones en tu equipo de trabajo.

Caso N.° 1

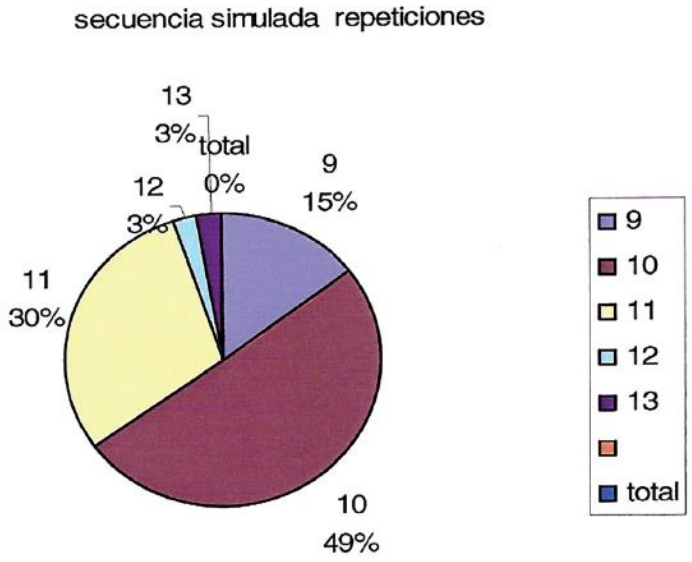


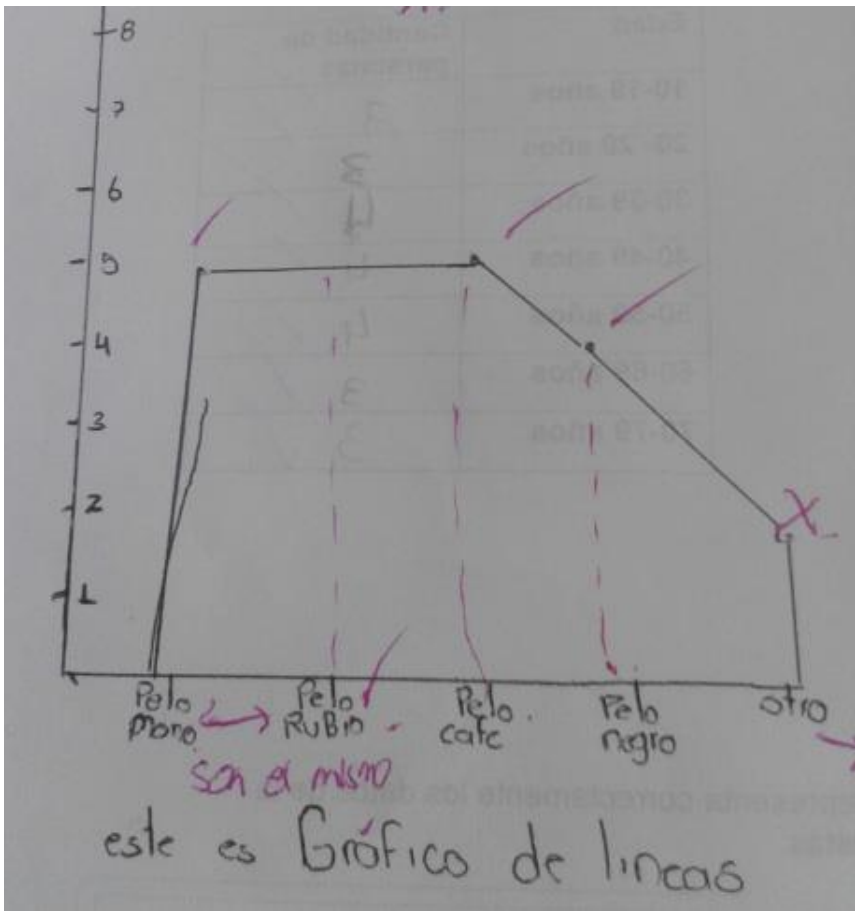




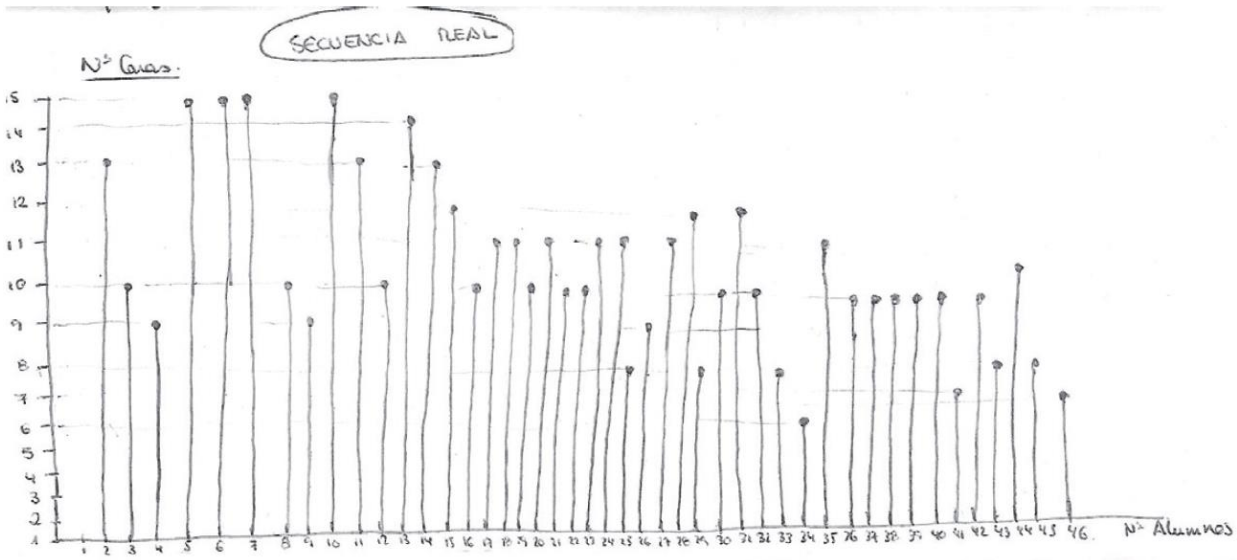
[8] Adaptado de Arteaga, Pedro, Carmen Batanero, Juan Jesús Ortiz y José Miguel Contreras (2011). *Sentido numérico y gráficos estadísticos en la formación de profesores*. Granada: Universidad de Granada. Consulta: 21 de febrero de 2016.<http://www.ugr.es/~jmcontreras/pages/Investigacion/articulos/2012Publicaciones.pdf>

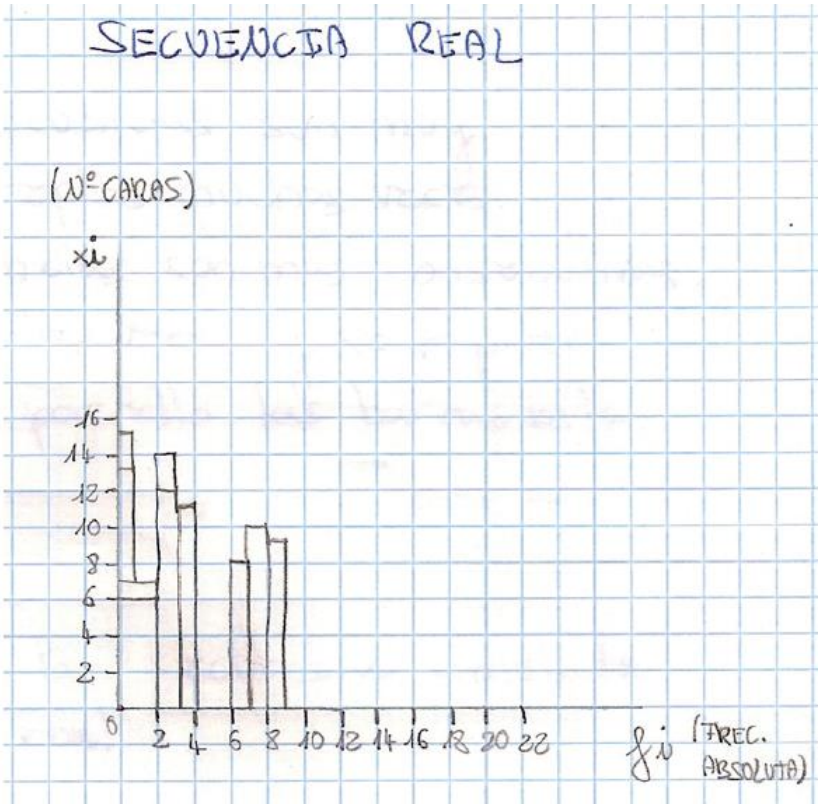
Caso N.° 2


secuencia simulada repeticiones
13
3%
total
0%
9
15%
12
3%
11
30%
10
49%
9
10
11
12
13
total

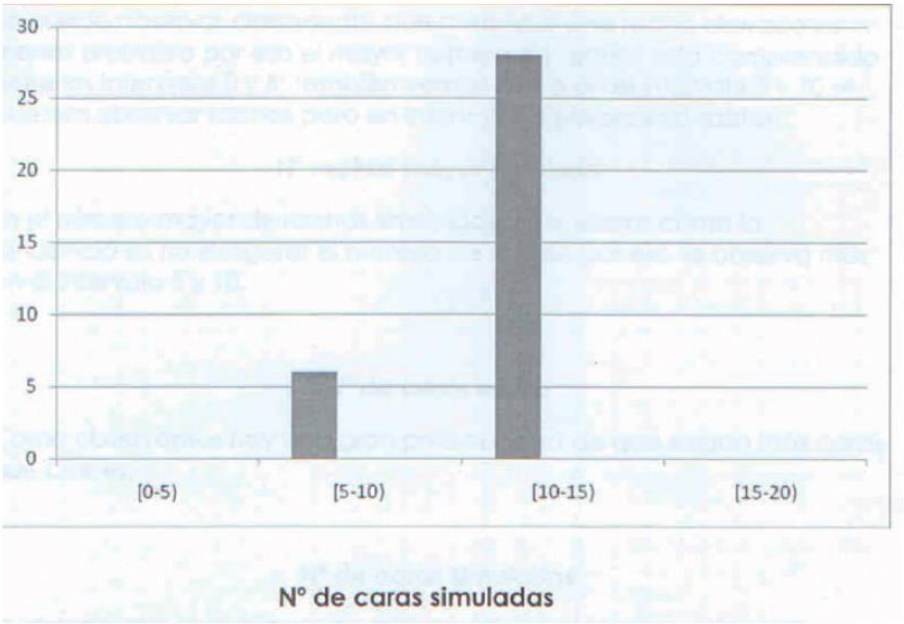

8
7
6
5
4
3
2
1
Pelo moro
Pelo Rubio
Pelo cafe
Pelo negro
otro
son el mismo
este es Gráfico de lineas

Caso N.° 3


SECUENCIA REAL
Nº Caras.
Nº Alumnos


SECUENCIA REAL
(Nº CARAS)
xi
fi (FREC. ABSOLUTA)

Caso N.° 4



Ideas importantes

¿Qué errores y dificultades pueden mostrar los estudiantes en el desarrollo de la competencia?

Fallos en la formación de la distribución de frecuencias a partir de una lista de datos
Se reconoce que no fueron capaces de formar una distribución de frecuencias a partir de una lista de datos. En consecuencia, no llegaron a agrupar los valores iguales (o similares) de cada una de las variables en estudio ni a calcular la frecuencia con la que aparecía dicho valor. En caso de representar únicamente sus datos (y no los del conjunto de la clase) tratan de resolver el problema planteado con un único elemento de la muestra y no con la muestra completa, es decir, no utilizan la idea de variable estadística.

Los estudiantes no llegan a la idea de variable estadística ni a la de frecuencia asociada a cada valor o de distribución de frecuencias de la variable. Muestran, por tanto, dificultades en la clasificación de los valores obtenidos de la variable y su recuento; utilizan una ordenación arbitraria y no son capaces de llegar a una representación gráfica adecuada de los datos. También confunden variable y unidad estadística, no siendo capaces de dar sentido a los datos recogidos en el contexto presentado.

Errores en las escalas o divisiones de los ejes
Se reconocen los errores descritos por Li y Shen (1992):

- Elegir una escala inadecuada para el objetivo pretendido, que no cubre todo el campo de variación de la variable representada o que es excesivamente amplia.
- Omitir las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos.
- No especificar el origen de coordenadas. Además, algunos estudiantes emplean escalas no homogéneas, mostrando fallo de razonamiento proporcional., además de fallo en razonamiento proporcional hay errores al representar cantidades numéricas en la recta real.

Elección de un gráfico inadecuado

Eligen un gráfico que no representa adecuadamente la tendencia o la variabilidad de los datos. Se observa que no comprenden bien las opciones que ofrece el *software*. Según Ben-Zvi y Friedlander (1997), se realiza un uso acrítico del *software*, ya que se construye el gráfico aceptando las opciones por defecto de la hoja Excel, sin valorar si la representación es adecuada o no.

Confusión entre variable dependiente e independiente en un gráfico

En algunas situaciones no realizan la distinción entre valor de la variable estadística y frecuencia. Bien intercambian los ejes para representarlas o bien las representan conjuntamente en un diagrama de barras adosadas. Estos estudiantes no relacionan las distintas formas de representación numérica con sus aplicaciones, ya que no discriminan las magnitudes que intervienen en el problema.

Este conflicto ya fue detectado por Ruiz (2006) en un estudio de comprensión de la variable aleatoria y lleva consigo una mayor dificultad en la lectura e interpretación del gráfico. Además, la moda en este caso es más complicada de detectar visualmente. Esto conlleva una mayor dificultad en la comparación de los gráficos de la secuencia simulada y la secuencia real y, por lo tanto, en la interpretación y extracción de conclusiones para dar respuesta a la pregunta planteada en el proyecto. A pesar de estos problemas el estudiante es capaz de agrupar los datos brutos y llegar al concepto de variable estadística y frecuencias y utilizar la idea de proporcionalidad en la construcción del gráfico.

Representación incorrecta de intervalos en la recta numérica

Aunque los datos obtenidos para realizar los gráficos solo tomaban valores enteros, algunos estudiantes representan las frecuencias en un histograma, que es un gráfico adecuado solo para variables continuas o variables agrupadas en intervalos. En este caso, los estudiantes al representar los intervalos en la recta numérica, encuentran dificultades representando intervalos con extremo común como si fuesen intervalos disjuntos. Hay también falta de comprensión del significado de un intervalo de valores en la recta numérica y del propósito del área en un histograma (que es representar las frecuencias en el intervalo base del mismo, de manera que cada barra del histograma es proporcional a la frecuencia de los valores representados). Además hay confusión entre el significado de los valores extremos de un intervalo en la recta numérica y la marca de clase del intervalo.

Cálculo de resúmenes estadísticos a partir de gráficas

El estudiante es más propenso a utilizar fórmulas matemáticas cuando tiene que determinar un resumen estadístico en vez de utilizar las gráficas directamente y basarse en las propiedades geométricas de las mismas. Por ejemplo, a la hora de calcular la moda o los percentiles a partir de una gráfica, la mayoría de los estudiantes optaban por aplicar las formulas (en la mayoría de los casos de dificultad de memorización) en vez de utilizar un desarrollo geométrico basado en la semejanza de triángulos, donde también hay que aplicar la proporcionalidad (concepto difícil para los estudiantes).

Interpretación de información numérica de los gráficos

Un último problema es que aunque hacen una lectura literal, no llegan a visualizar las tendencias o patrones numéricos en los datos. Aunque llegaron a construir un gráfico que visualizaba la distribución de los datos, estos se pueden presentar sin ninguna interpretación. Solo una tercera parte de los estudiantes fue capaz de visualizar la posición central y dispersión a partir del gráfico, y de ellos solo un 13 % dio una conclusión correcta sobre la pregunta planteada en el problema.

1.4 Orientaciones para la enseñanza y el aprendizaje relacionados con la estadística

A continuación, resuelva los siguientes problemas. Reconozca en ellos la competencia y las capacidades y proponga los indicadores para el grado. Asimismo, plantee el uso de una orientación didáctica y reconozca los aspectos didácticos.

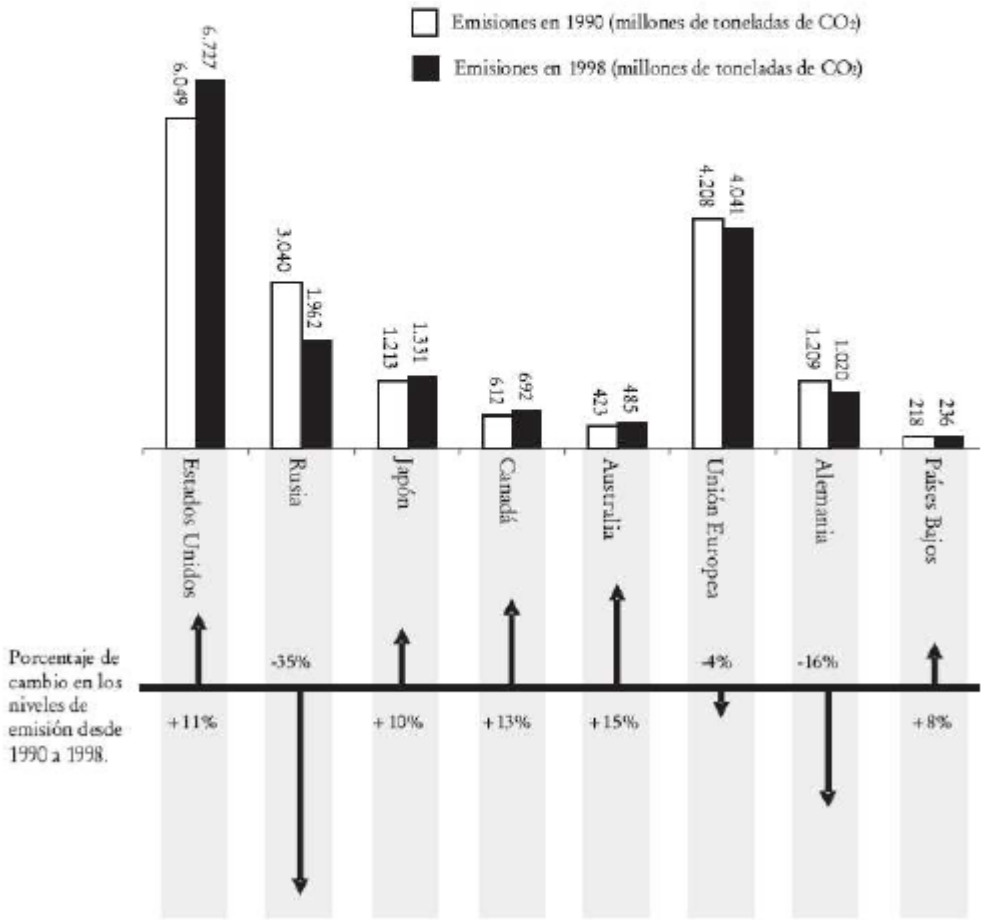
Los problemas mostrados fueron propuestos por la Dirección de Educación Secundaria (2015) en la plataforma Jornada Escolar Completa.

Problema N.° 1

LOS NIVELES DE CO_2

Muchos científicos temen que el aumento del nivel de gas CO_2 en nuestra atmósfera esté causando un cambio climático.

El diagrama siguiente muestra los niveles de emisión de CO_2 en 1990 (las barras claras) de varios países (o regiones), los niveles de emisión en 1998 (las barras oscuras), y el porcentaje de cambio en los niveles de emisión entre 1990 y1998 (las flechas con porcentajes).



Pregunta 1 *0 1 2 9*

En el diagrama se puede leer que el aumento de emisiones de CO_2 en Estados Unidos del año 1990 al año 1998 fue del 11%.

Escribe los cálculos para demostrar cómo se obtiene este 11%.

Pregunta 2 *1 0 9*

Luisa analizó el diagrama y afirmó que había descubierto un error en el porcentaje de cambio de los niveles de emisión: "El descenso del porcentaje de emisión en Alemania (16%) es mayor que el descenso del porcentaje de emisión en toda la Unión Europea (total de la UE, 4%). Esto no es posible, ya que Alemania forma parte de la Unión Europea".

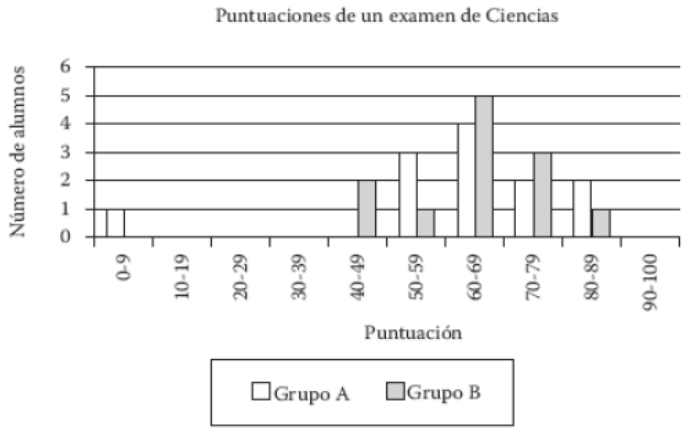
¿Estás de acuerdo con Luisa cuando dice que esto no es posible? Da una explicación que justifique tu respuesta.

Problema N.° 2

PUNTUACIONES EN UN EXAMEN

El diagrama siguiente muestra los resultados en un examen de Ciencias para dos grupos, denominados Grupo A y Grupo B.

La puntuación media del Grupo A es 62,0 y la media del Grupo B es 64,5. Los alumnos aprueban este examen cuando su puntuación es 50 o más.



Al observar el diagrama, el profesor afirma que, en este examen, el Grupo B fue mejor que el Grupo A.

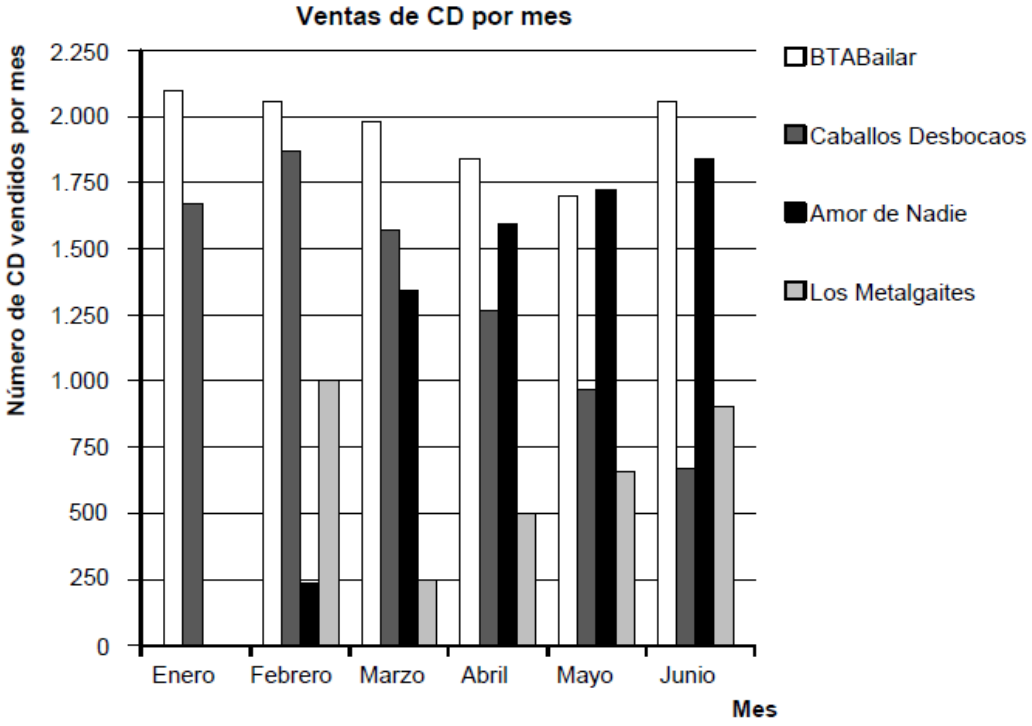
Pregunta 1 *1 0 9*

Los alumnos del Grupo A no están de acuerdo con su profesor. Intentan convencer al profesor de que el Grupo B no tiene por qué haber sido necesariamente el mejor en este examen. Da un argumento matemático, utilizando la información del diagrama, que puedan utilizar los alumnos del Grupo A.

Problema N.° 3

LISTA DE ÉXITOS

Los nuevos CD de los grupos *BTA Bailar* y *Caballos Desbocaos* salieron a la venta en enero. En febrero los siguieron los CD de los grupos *Amor de Nadie* y *Los Metalgaites*. El siguiente gráfico muestra las ventas de CD de estos grupos desde enero hasta junio.



Pregunta 1

PM918Q01

¿Cuántos CD vendió el grupo *Los Metalgaites* en abril?

A 250

B 500

C 1.000

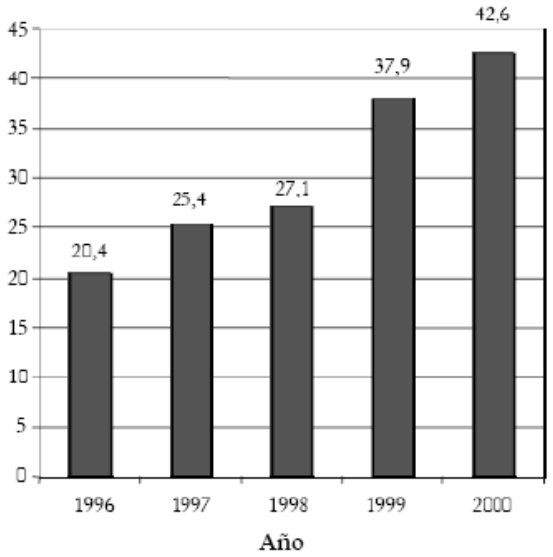
D 1.270

Problema N.° 4

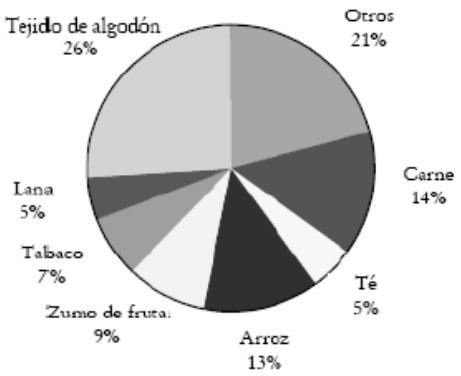
EXPORTACIONES

Los siguientes diagramas muestran información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país cuya moneda es el zed.

Total de las exportaciones anuales de Zedlandia en millones de zeds, 1996-2000



Distribución de las exportaciones de Zedlandia en el año 2000



Pregunta 1 1 0 9

¿Cuál fue el valor total (en millones de zeds) de las exportaciones de Zedlandia en 1998?

Respuesta: .....

Pregunta 2 1 0 9

¿Cuál fue el valor de las exportaciones de zumo de fruta de Zedlandia en el año 2000?

A 1,8 millones de zeds.

B 2,3 millones de zeds.

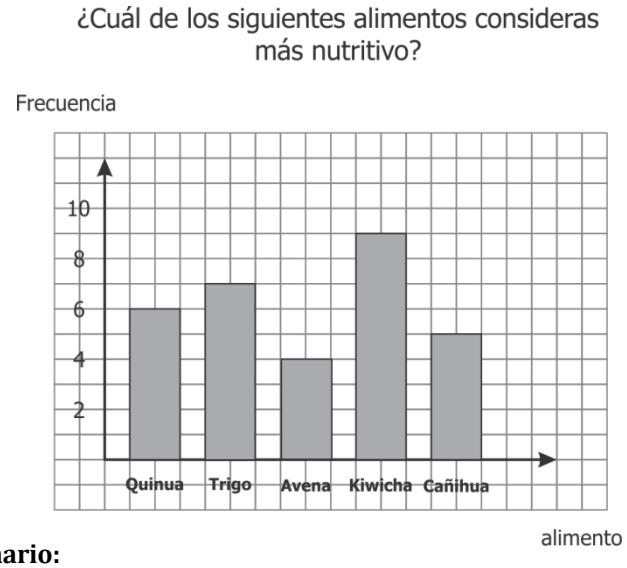
C 2,4 millones de zeds.

D 3,4 millones de zeds.

E 3,8 millones de zed

Problema N.° 5

Se encuesta a un grupo de personas para saber cuál de cinco ingredientes considera más nutritivo. Los resultados se muestran en la siguiente figura:



Cuestionario:

a) ¿Qué tipo de respuesta dieron los encuestados? ¿Un valor numérico o no numérico?

b) ¿Es útil calcular la moda en este caso? ¿Por qué? ¿Cómo interpretarías su valor?

c) Un estudiante del primer año está empeñado en calcular el promedio de este conjunto de datos. ¿Será eso posible? ¿Por qué?

Problema N.° 6

Organizando datos relacionados al consumo de energía eléctrica

En grupo, organiza los datos relacionados al consumo de energía eléctrica. Para empezar, indica la cantidad de soles que se pagó en el último mes.

- Con los datos obtenidos, elabora una tabla de distribución de frecuencias agrupándolos en intervalos.
- Calcula lo siguiente:

a) Hallando el Rango (R):

b) Hallando el número de intervalos (k):

c) Hallando la amplitud (A):

d) Determinando los intervalos:

e) Hallando la marca de clase (m_i):

- Organiza la tabla de distribución de frecuencias.

Tabla de distribución de frecuencias							
Intervalos (I_i)	**Marca de clase (M_i)**	**Frecuencia Absoluta simple (f_i)**	**Frecuencia Absoluta Acumulada (F_i)**	**Frecuencia relativa simple (h_i)**	**Frecuencia relativa acumulada (H_i)**	**Frecuencia relativa porcentual simple (h_i%)**	**Frecuencia relativa porcentual acumulada (H_i%)**
I_i	**M_i**	**f_i**	**F_i**	**h_i**	**H_i**	**h_i%**	**H_i%**

- A partir de los datos obtenidos en la tabla de distribución de frecuencias, calcula las medidas de tendencia central para datos agrupados y realiza su interpretación.

Sesión 2

Contenido

- Lectura: "Comprensión y propiedades del promedio"
- Desarrollo de situaciones: recomendaciones para la enseñanza de la estadística
- Análisis: los medios de prensa y el aprendizaje de la estadística
- Estrategias de aprendizaje y enseñanza relacionadas con la estadística (Utilizando sesiones de la JEC e ítems de la evaluación PISA)

Competencias que desarrollará el docente

- Expresa ideas y conceptos con respecto al promedio.
- Reconoce condiciones para resolver problemas de medidas estadísticas
- Formula procesos para solucionar un problema y los desarrolla en equipos de trabajo, para lo cual concreta planteamientos didácticos específicos.

2.1 Comprensión y propiedades del promedio

Lectura[9]

En un artículo sobre proporcionalidad, el autor (Flores, 1995) describe la diversidad de circunstancias en las que aparece el promedio. En este artículo cita dos maneras de calcular el promedio, las cuales se dan a continuación.

El promedio se puede obtener de dos maneras matemáticamente equivalentes, dependiendo de cómo están presentados los datos. Para una lista de datos, $x_1, x_2, ..., x_n$, el promedio se expresa como:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Si por otro lado, los datos están enumerados con sus frecuencias absolutas respectivas ($f_1, f_2, ..., f_n$), el promedio se expresa de la siguiente manera:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

Este procedimiento es conocido como el algoritmo del promedio ponderado (el número de veces que aparece cada dato es su "peso" o su ponderación). Por ejemplo, si un profesor realizó cuatro exámenes durante un mes y desea contarlos con diferentes "pesos": 10 % el primero, 20 % los siguientes dos y 50 % el final, y desea obtener el promedio de las calificaciones de sus estudiantes, tendrá que realizar un promedio ponderado.

Esta idea de ponderación es más general y aparece en problemas de velocidades, mezclas, etc. Por ejemplo, si un automóvil viaja a una velocidad de 100 km/h durante 2 horas y después viaja a 40 km/h durante la siguiente hora, su velocidad promedio no será de 70 km/h. El promedio debe realizarse ponderado, usando los tiempos como "pesos". De esta manera, la respuesta correcta será de 80 km/h. En un segundo ejemplo, si se mezclan dos metales en una razón de 4 a 1 y sus valores monetarios respectivos son diferentes, el valor de la aleación resultará ser un promedio ponderado de los valores de los dos metales. Otro de los trabajos pertinentes a la presente investigación es un estudio sobre el desarrollo del concepto de promedio aritmético en niños (Strauss y Bichler, 1988). En él se citan siete propiedades fundamentales del promedio, las cuales se enlistan a continuación (en cada una de ellas hemos incluido un ejemplo a manera de explicación):

a. El promedio se localiza entre los valores extremos. Por ejemplo, el promedio de las edades de un grupo de personas no puede ser mayor que la edad de la persona más adulta ni ser menor que la edad de la persona más joven.

b. La suma de las desviaciones desde el promedio es cero. Por ejemplo, el promedio de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 es 3.5 y, por tanto, tenemos que: (3.5 – 1) + (3.5 – 2) + (3.5 – 3) + (3.5 – 4) + (3.5 – 5) + (3.5 – 6) = 0

c. El promedio es afectado por valores diferentes a él. Por ejemplo, si el promedio de calificaciones de un estudiante durante 5 años es de 9, cualquier calificación subsecuente diferente de 9 cambiará su promedio.

d. El promedio no es necesariamente igual a uno de los valores que fueron sumados. Por ejemplo, el promedio de 1 y 3 es 2. Este valor no forma parte de los datos que fueron promediados.

e. El promedio puede ser una fracción que no tiene contraparte en la realidad física. Por ejemplo, el promedio del número de hijos por familia de una población determinada puede ser de 4.7. Este valor decimal no tiene un significado claro dentro de la variable promediada que puede tener solo valores discretos enteros.

[9] Tomado Mochón, Simón y María Margarita Tlachy Anell (2003) "Un estudio sobre el promedio: concepciones y dificultades en dos niveles educativos". *Educación Matemática*, volumen 15, número 3, pp. 5-28.

f. Cuando se calcula un promedio, deben ser tomados en cuenta los valores de cero. Por ejemplo, al promediar las calificaciones de un grupo de estudiantes en un examen, debemos incluir todos los ceros que haya.

g. El promedio es un valor representativo de los valores que fueron promediados. El promedio de los sueldos de las personas en una región determinada es un indicador de alrededor de qué valor se centra esta variable.

Mokros y Russell (1995) investigaron la noción de representatividad del promedio con niños en grados escolares del cuarto al octavo. Encontraron cinco acercamientos diferentes al resolver problemas de promedio, los cuales se dan a continuación con una pequeña explicación:

a) Promedio como moda. En este enfoque los estudiantes manejan el promedio como el valor modal, es decir, como el valor que ocurre con mayor frecuencia. Muestran también una falta de flexibilidad en la elección de estrategias.

b) Promedio como algoritmo. Aquí los estudiantes eligen un acercamiento exclusivamente algorítmico para encontrar el promedio, lo cual resulta con frecuencia poco efectivo.

c) Promedio como algo razonable. En éste, los estudiantes se basan en su experiencia cotidiana y en su intuición para resolver los problemas. Usualmente, estos estudiantes tienen la noción de que el promedio está más o menos centrado dentro de los datos.

d) Promedio como punto medio. Estos estudiantes usan el concepto de punto medio en sus construcciones e interpretaciones para definir el promedio. Impera en ellos la idea de una distribución simétrica.

e) Promedio como punto matemático de balance. En esta noción, que aparece en estudiantes de mayor edad, el promedio es visto como un punto de balance, para el cual, un valor mayor tiene que balancearse con uno menor.

Varios investigadores señalan problemas de comprensión acerca del promedio. Strauss y Bichler (1988), mediante tareas presentadas a niños de 8 a 14 años de edad, estudiaron la dificultad de cada una de las propiedades mencionadas anteriormente.

Estos autores concluyeron que estas propiedades podrían dividirse por su dificultad en dos grupos, siendo las más complejas, las propiedades “b” (suma de desviaciones = 0), “f” (ceros en los datos) y “g” (representatividad del promedio). Estos investigadores sugieren que la instrucción del promedio en el salón de clase se debe realizar en dos tiempos diferentes; uno atendiendo a las propiedades más sencillas y el otro a las propiedades más difíciles. Otras investigaciones registran que el promedio es utilizado principalmente como una regla de cálculo, sin poderle dar una interpretación al valor obtenido (Gattusso y Mary, 1996; Gattusso, 1997). En estos estudios se registran las concepciones que tienen los estudiantes de diferentes niveles de escolaridad sobre el concepto de promedio. Estos autores concluyen que el promedio no es un concepto fácil de entender. Por último, Pollatsek, Lima y Well (1981) estudiaron la noción del promedio y el promedio ponderado en estudiantes universitarios. Un problema del tipo usado en este estudio es el siguiente. Puesto que el peso promedio de 6 hombres es de 180 libras y el peso promedio de 4 mujeres es de 125 libras, se preguntó a los estudiantes cuál sería el peso promedio de las 10 personas. Sus resultados indicaron que una gran proporción de los estudiantes no tiene un buen sentido de los promedios ponderados. Estos autores atribuyen estos problemas a la enseñanza de tipo de reglas de cálculo y recetas sin que los estudiantes obtengan una comprensión de los conceptos

Actividad. Elabora un cuadro comparativo que exprese las características del promedio y acuerda en tu equipo de trabajo a que comprensión del promedio se deberá dar más énfasis en el VI y VII ciclo de la EBR.

2.2 Recomendaciones para la enseñanza de la estadística

Resuelve los problemas y reconoce cuáles son sus características.

Situación N.° 1[10]

Sabiendo que el consumo de combustible fue estudiado para cada una de las empresas líderes en la confección de calzado de los países del Mercosur, realice el análisis respectivo para las medidas que se presentan a continuación; además, establezca cuál de las tres empresas es la más homogénea y cuál de las tres es la que gasta más combustible.

	Media	Mediana	Moda	C.V.
Empresa A	1025,8 L	898,3 L	827,8 L	35 %
Empresa B	758,29 L	645,8 L	545 L	66 %
Empresa C	9427,01 L	7305 L	7800 L	50 %

Situación N.° 2[11]

Un grupo de economistas realizó un diagnóstico sobre los trabajadores de la empresa productora de los lácteos que más se exportan en la región, durante el año 2006. Los valores registrados por las variables para cada mes del año 2006 fueron para la cantidad de horas trabajadas por día (X1); cantidad de trabajadores (X2); litros de lácteos producidos por trabajador (X3), nivel de rendimiento de los trabajadores (X4) y modo de traslado utilizada para llegar a la empresa (x5 donde 1 = auto; 2 = moto; 3 = ómnibus, 4 = caminando).

Período	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	1. Identifique la población objeto de estudio.
Ene 2006	4	30	2	Alto	1	2. Identifique la unidad de análisis.
Feb 2006	5	12	8	Medio	1	3. ¿Cuál es la escala de medición de cada una de las variables que aparecen en la base de datos?
Mar 2006	1	34	12	Bajo	3	
Abr 2006	2	12	2	Bajo	1	
May 2006	1	8	20	Medio	2	4. ¿Cuál es la cantidad de horas promedio de trabajo por día de los trabajadores lácteos?
Jun 2006	4	20	8	Medio	4	
Jul 2006	2	42	2	Alto	2	5. ¿Cuál es el porcentaje de variación de los litros de lácteos?
Ago 2006	3	24	4	Bajo	3	
Set 2006	4	14	20	Bajo	1	6. El personal de la empresa se traslada mayoritariamente en …….
Oct 2006	3	8	24	Medio	1	
Nov 2006	4	55	4	Alto	2	7. ¿Qué gráficos podría realizar para describir la variable X4?
Dic 2006	3	7	24	Bajo	4	

[10] Tomados de Repetto, Farías, Vigna, Alessandrini, Benitez (2012). *Ejercicios sobre Medidas de Posición, Tendencia Central y Dispersión*. Material de enseñanza. s/l: Estadística RRII-Facultad Derecho.
[11] Ídem.

Situación N.° 3[12]

A partir de los datos sobre las importaciones y exportaciones, expresados en dólares americanos, de los diferentes tipos de cultivos de América Latina en los años 2006 y 2007 que se presentan a continuación, resuelve.

	2006		2007	
Cultivo Verano	**Importación**	**Exportación**	**Importación**	**Exportación**
ARROZ	63.066	80.010	268.601	146.811
SOJA	2.647.493	0	14.020.274	30
GIRASOL	605.250	28.273	1.073.762	5.167
MAIZ	3.012.006	138.378	8.508.028	397.803
SORGO	4.161.730	75.625	4.907.988	38.526
TOTAL	10.489.545	322.286	28.778.653	588.337
Cultivo Invierno	**Importación**	**Exportación**	**Importación**	**Exportación**
TRIGO	295.327	0	542.036	10.640
LINO	0	0	0	0
CEBADA	26.950	80	2.855	0
TOTAL	**322.277**	**80**	**544.891**	**10.640**
Cultivo Forrajero	**Importación**	**Exportación**	**Importación**	**Exportación**
ACHICORIA	40	34.119	165.210	116.001
ALFALFA	445.852	53.442	624.167	40.300
AVENA	29.760	25.168	37.251	80.840
BROMUS	0	0	2.900	0
CEBADILLA	50.153	0	116.887	0
CESPED	106.441	0	132.083	0
COLZA	37.719	0	296	34.235
DACTILIS	305.316	0	218.085	0
FESTUCAS	1.102.411	265.672	1.327.041	118.379
HOLCUS	0	0	0	0
LOTUS	893.607	1.421.271	309.837	1.647.743
MOHA	0	93.361	0	200.403
PLANTAGO	0	0	0	0
RAIGRAS	431.332	773.755	311.846	1.946.651
S/ESP.		917.010		0
TRIFOLIUM	5.229.150	173.246	1.148.218	933.731
TOTAL	**8.631.781**	**3.757.044**	**4.393.821**	**5.118.283**

a) Calcular y completar las medidas que faltan en el cuadro resumen.

	VERANO		INVIERNO		FORRAJERO	
	Importación	**Exportación**	**Importación**	**Exportación**	**Importación**	**Exportación**
Media	2.097.909	64.457			575.452	234.815
Mediana	2.647.493	75.625			50.153	29.644
Desvío Estándar	1.715.050	53.139	163.284	46,1880215	1.333.226	423.585
C.V.	82				232	180
Cuartil 1	605.250	28.273	13.475	0	20	0
Cuartil 3	3.012.006	80.010	161.139	40	438.592	196.353
Rango						
Rango Intercuart.	2.406.756		147.664		438.572	

b) ¿Cuál es el tipo de cultivo que más se importa para el año 2006?

c) Realice un análisis descriptivo de las importaciones que realizó América Latina en cada año.

d) Realice una comparación de las importaciones de los diferentes tipos de cultivos realizadas el año 2006 y 2007.

e) Determine cuál de los dos años estudiados es el que registra mejor situación en las importaciones de cultivos en América Latina.

[12] Ídem.

Situación N.° 4

Veamos este otro cuadro, en el que se presentan las calificaciones merecidas por nuestros países en cuanto a las *políticas públicas desde 1980*:

Calificaciones en cuanto a las Políticas Públicas desde 1.980

País	Estabilidad	Adaptabilidad	Ejecución y cumplimiento	Coordinación y coherencia	Orientación al interés público	Eficiencia	Índice general de políticas
Argentina	Bajo	Medio	Bajo	Bajo	Medio	Bajo	Bajo
Bolivia	Medio	Alto	Medio	Medio	Medio	Medio	Medio
Brasil	Alto	Alto	Alto	Alto	Medio	Medio	Alto
Chile	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Muy Alto
Colombia	Alto	Alto	Alto	Medio	Medio	Medio	Alto
Costa Rica	Alto	Medio	Alto	Medio	Alto	Alto	Alto
Rep. Dominicana	Medio	Medio	Medio	Medio	Bajo	Medio	Medio
Ecuador	Bajo	Medio	Bajo	Bajo	Bajo	Bajo	Bajo
El Salvador	Alto	Alto	Alto	Medio	Medio	Alto	Alto
Guatemala	Medio	Medio	Bajo	Medio	Bajo	Medio	Bajo
Honduras	Alto	Medio	Medio	Medio	Bajo	Medio	Medio
México	Alto	Medio	Alto	Medio	Medio	Alto	Alto
Nicaragua	Medio	Medio	Medio	Bajo	Bajo	Medio	Bajo
Panamá	Medio	Bajo	Medio	Bajo	Bajo	Bajo	Bajo
Paraguay	Medio	Bajo	Bajo	Bajo	Bajo	Bajo	Bajo
Perú	Medio	Medio	Medio	Medio	Medio	Medio	Medio
Uruguay	Alto	Alto	Alto	Medio	Medio	Medio	Medio
Venezuela	Bajo	Bajo	Medio	Bajo	Medio	Bajo	Bajo

Fuente/Informe del Banco Interamericano de Desarrollo, noviembre de 2005 EL NACIONAL

Analice la evaluación que se hace de su país y compárela con las de países vecinos al suyo. Exprese sus conclusiones al respecto.

a. Identifique la variable y el tipo de variable.

b. Plantee un tipo de gráfica estadística.

c. Determine la media aritmética, la mediana y la moda.

Situación N.° 5[13]

Para resolver el siguiente problema, se recomienda formar grupos de seis estudiantes para interpretar paso a paso la solución del problema, los cuales serán guiados por el docente.

Resuelve los problemas siguientes:

Para determinar el grado de sobrepeso de los estudiantes de tercero de Secundaria de un colegio particular se tomó una muestra de 24 estudiantes. Los resultados fueron los siguientes:

62,2 53,2 60,2 55,6 65,8 49,6

57,3 62,3 65,2 62,2 49,9 46,4

54,2 50,1 61,1 42,3 44,8 40,9

66,9 60,2 61,4 51,2 56,2 43,3

Con respecto a esta información:

d. Identifiquen la variable y el tipo de variable.

e. Elaboren una tabla de frecuencias para datos agrupados.

f. Elaboren un histograma con su polígono de frecuencias.

g. Determinen la media aritmética, la mediana y la moda.

[13] Ministerio de Educación del Perú (2007). *Matemática. Serie 3 para docentes de Secundaria. Teoría de matemática básica. Fascículo 10: la estadística y sus aplicaciones*. Lima: Minedu. Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivosdes/fasc_mat/04_mat_d_s3_f10.pdf>

h. Establezcan una relación entre estas tres medidas de tendencia central y determinen el tipo de simetría, interpretando los resultados.

i. Calcula el valor de dispersión y el coeficiente de variación

j. Interpreta la asimetría de la distribución.

Situación N.° 6[14]

- Los diámetros en centímetros de 50 lapiceros fabricados por una cierta compañía se muestran en la siguiente tabla.

0,529	0,538	0,532	0,529	0,535	0,536	0,534	0,542	0,537	0,530	0,538
0,536	0,536	0,536	0,526	0,525	0,524	0,543	0,530	0,539	0,542	0,528
0,546	0,532	0,534	0,535	0,539	0,527	0,544	0,527	0,535	0,534	0,540
0,540	0,536	0,532	0,535	0,535	0,535	0,528	0,541	0,531	0,540	0,532
0,535	0,533	0,535	0,537	0,537	0,545					

Con respecto a esta transformación:

a. Identifica la variable y clasifícala.

b. Determina el número de intervalos de clase aplicando la fórmula de Sturges y la longitud de los intervalos.

c. Elabora una tabla de frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

d. Traza el histograma, el polígono de frecuencias y la ojiva porcentual acumulada.

e. Calcula el diámetro medio, e indica la media en el histograma trazando una línea vertical.

f. Calcula la mediana y la moda.

g. Compara las medidas de tendencia central. Indica qué tipo de asimetría tiene la distribución e interpreta el sesgo que presenta.

h. Calcula el valor de dispersión y el coeficiente de variación

i. Interpreta la asimetría de la distribución.

Ideas importantes

¿Qué actividades debemos de promover para desarrollar la competencia relacionado a estadística?[15]

Análisis de noticias

Se pide a los estudiantes traer recortes periodísticos sobre temas de actualidad en los cuales se evidencie el uso de la estadística o de la probabilidad. Por ejemplo, los resultados de una encuesta de opinión, el movimiento del mercado bursátil, el crecimiento de la población, las estadísticas de mortalidad infantil, los estudios estadísticos, los resultados de experimentos, etc.

A partir del análisis de estos recortes periodísticos los estudiantes pueden ir definiendo las características de una tabla de frecuencia o de los gráficos estadísticos. Se deben elaborar fichas de preguntas que lleven al estudiante a observar algunos detalles, como por ejemplo:

[14] Ídem.

[15] Ministerio de Educación del Perú (2007). *Matemática. Serie 2 para docentes de Secundaria. Didáctica de la Matemática. Fascículo 5: aspectos metodológicos en el aprendizaje de la probabilidad y de la estadística en Secundaria.* Lima: Minedu. Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivosdes/fasc_mat/04_mat_d_s2_f5.pdf>

- ¿Cuáles son las variables objeto de estudio en esta noticia?
- ¿Cuál es la población y cuál es la muestra?
- ¿Cuál es la diferencia entre población y muestra?
- ¿Qué entiendes por frecuencia?
- ¿Qué tipos de frecuencias encuentras?
- ¿Qué representan los datos expresados en porcentajes?

Análisis de gráficas

La comprensión de las gráficas que aparecen en los periódicos es una de las habilidades básicas imprescindibles para entender nuestro mundo tan basado en la información. Hay que estar atentos a la variedad de gráficos que se presentan hoy en día en los medios de comunicación para poder trabajar en nuestras clases con todos los tipos posibles.

Algunas recomendaciones para trabajar con gráficos estadísticos de la prensa en nuestras clases:

- Buscar todas las gráficas que hay en uno o varios periódicos.
- Clasificarlas según su tipo (cartesianas, circulares, poligonales, de barras, etc.).
- Comentar que es lo que se "ve", los tipos de gráficas que no se hayan visto antes (aquellas que tengan un atractivo especial) y discutir su procedencia.
- Comparar gráficas de un mismo tema, buscar analogías y diferencias.
- Destacar los aspectos más llamativos.
- Mejorar las gráficas si es posible.
- Comparar los datos que aportan las gráficas con la información escrita.
- Estudiar las gráficas con detenimiento para descubrir errores.
- Buscar la manera de presentar las gráficas que destaquen determinados aspectos.
- Determinar las características y diferencias de las diversas maneras de representar gráficamente los datos analizados.

Estudio de unas elecciones

Las elecciones suponen un importante acontecimiento social y se realizan en nuestro medio cada cierto tiempo. Ellas permiten estudiar mecanismos matemáticos como las encuestas. A continuación, presentamos algunas pautas para desarrollar esta actividad con nuestros estudiantes:

- Recopilar las encuestas sobre las elecciones que se presentan en distintos periódicos.
- Reflexionar con los estudiantes sobre la posibilidad de comparar los diferentes resultados.
- Comparar los resultados de las encuestas con los resultados reales obtenidos en las elecciones.
- Determinar el periódico que presento los resultados más acertados.
- Discutir los criterios que permitan hacer una clasificación de las encuestas electorales.
- Elaborar encuestas y aplicarlas sobre colectivos que estén a nuestro alcance, por ejemplo: las personas que votan en un colegio.
- Realizar el tratamiento de los resultados y compararlos con los obtenidos en las elecciones.
- Representar gráficamente los resultados, utilizando los métodos más apropiados.
- Estudiar el porcentaje de votantes y el porcentaje de escaños de cada una de las listas.

2.3 Los medios de prensa y aprendizajes de la estadística

A continuación, se presenta una relación de situaciones en las cuales se reconoce el uso de los medios de prensa, resuelva cada situación en grupos de trabajo, asimismo, reconozca la intención de cada situaciones en el marco del desarrollo de competencias matemáticas. [16]

Situación N.° 1

Responder las siguientes interrogantes respecto a los recortes periodisticos

La vida laboral en España concluye a los 62 años, cuatro más tarde que los italianos y tres que franceses o alemanes Más de la mitad de los retirados aspira a dedicar su tiempo libre a viajar, pero solo la tercera parte lo cumple	Proporciones de personas que opinan sobre un tema. ¿Preguntarán a los mismos antes y después?
Los hombres declaran a Hacienda un salario medio un 30% superior al de las mujeres El sueldo medio anual de los madrileños es un 70% más alto que el de los extremeños	Comparación entre las variables sueldo de hombres y de mujeres a través de la media. ¿Como se habrá hecho el cálculo? ¿Es una media muestral o poblacional?
La policía denuncia a veinte personas cada semana por orinar en la calle	Media de personas que incumplen la normativa por semana. ¿Son siempre 20 personas?
Los trabajadores españoles aspiran a finalizar su vida laboral a los 57 años **Solo el 10% sabe cuánto va a cobrar de pensión y el 60% cree que mantendrá su nivel de vida**	Proporciones de personas que opinan sobre un tema. ¿Cómo se habrá seleccionado la muestra?

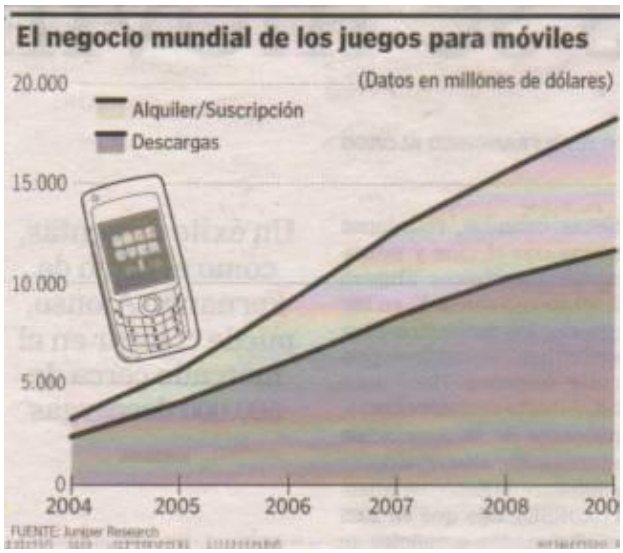
Plantear interrogantes a partir de cada una de las gráficas, de tal forma que podamos reconocer la información que hay en ellas.

[16] Tomado de Sonsoles Blázquez (s/f). *Estadística a través de la prensa*. Material de enseñanza. Valladolid: CFIE Valladolid.

Situación N.° 2

Situación N.° 3

Situación N.° 4



Situación N.° 5

Completa los espacios en blanco, comprueba tus soluciones y localiza errores en el artículo inicial.

Los contratos a mujeres víctimas de maltrato se cuadruplican en los últimos 6 años del Plan Dike

▸Las contrataciones subvencionadas alcanzan las ____, pasando de 22 en ____ a 92 en 2005

▸____ empresas de Castilla y León ofertan el último año un total de ____ puestos de trabajo

MAR PELAEZ

VALLADOLID.— Años de miedo, de golpes, de agresiones o de soledad ante la falta de respuestas, ha diezmado su autoestima. ¿Y ahora qué hago? Esta es la pregunta que con más frecuencia se plantean todas esas mujeres que un buen día se hartaron de tantas palizas y se lanzaron a recuperar su vida. Pero, ¿cómo lo hago sin trabajo?

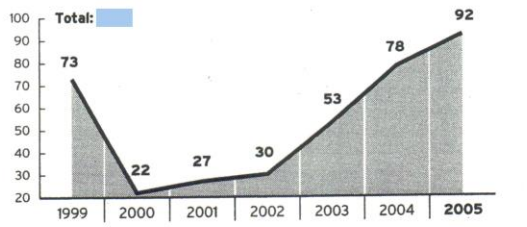
La carrera en solitario de esas mujeres maltratadas de Castilla y León por tratar de salir de su infierno puede encontrar su meta en el Plan Dike, un programa impulsado por la Administración regional hace ya siete años como puerta de entrada al mercado laboral para todas las víctimas de esa violencia.

Al menos ____ mujeres de Castilla y León han logrado en estos últimos siete años encontrar su tabla de salvación en forma de contrato laboral. Las empresas acogieron con fuerza las subvenciones otorgadas por el Gobierno regional en la primera convocatoria anual del plan (1999) y se decidieron a contratar a ____ mujeres. La respuesta del siguiente año fue mucho más floja y sólo ____ lograron un empleo.

Evolución del Plan Dike

Año 2005	Total contratos	Contratos temporales	Contratos indefinidos	Empresas colaboradoras	Puestos ofertados
• Avila	2	2	0	2	4
• Burgos	8	5	3	6	10
• León	12	10	2	16	48
• Palencia	12	8	4	9	20
• Salamanca	7	3	4	10	15
• Segovia	2	2	0	2	2
• Soria	6	4	2	5	14
• Valladolid	23	19	4	18	36
• Zamora	20	15	5	9	23
• TOTAL	92	68	24	77	172

Evolución de las contrataciones



FUENTE: Consejería de Familia

DIARIO DE VALLADOLID / EL MUNDO

La Junta primó en 2005 por primera vez los contratos fijos, con una ayuda de 4.500 euros

Desde entonces, este plan ha resurgido y ha experimentado una constante línea ascendente, hasta culminar en los ____ contratos a lo largo de 2005. Es decir en ____ años se ha cuadruplicado el número de contrataciones de mujeres víctimas de malos tratos en la región.

La directora general de la Mujer, Rosa Urbón, no oculta su «satisfacción» por unos resultados que evidencian un «constante crecimiento de un plan que se ha consolidado con los años».

Y eso, a pesar de que las cuantías de la subvenciones con que nació el programa han ido sufriendo un recorte paulatino. Las empresas comenzaron recibiendo unos 4.800 euros por contratos de una duración máxima de ocho meses, luego se rebajó a 3.600 euros por contratos de seis meses como máximo. Ahora, a la espera de que salga en breve publicada la nueva orden para 2006, perciben 2.000 euros si el contrato se hace por un periodo mínimo de seis meses, y 4.500 euros si el contrato es indefinido.

Urbón explica que el pasado año la Dirección General de la Mujer decidió cambiar su estrategia para apostar en mayor medida por la contratación indefinida, más que por la temporal. Y a juzgar por los datos, facilitados por la Consejería de Familia, las empresas han respondido «favorablemente».

De los ____ contratos suscritos en 2005, un ____% —en concreto 24— tenían la naturaleza de fijos. Eso ha motivado que la nueva línea de subvenciones que se convocará para 2006 «seguirá apostando por la estabilidad en el empleo», según confirmó la directora general, quien aseguró que la gran mayoría de las mujeres que inician una relación laboral con una empresa logran pasar a formar parte de la plantilla de forma fija.

También tratará de promover el empleo entre todas esas mujeres que sufren esa lacra social y que, además, son inmigrantes. Durante 2005, 15 de ellas consiguieron una oportunidad de empleo —el 20% con carácter indefinido—.

La lástima es que no todos los empleos que ofertan las empresas logran encontrar a la candidata 'perfecta'. De hecho, el ____% de las ofertas de trabajo que lanzaron empresas castellanas y leonesas se quedaron vacías. «La escasa o nula experiencia laboral previa de estas mujeres y su poca preparación académica» hizo que el año pasado no se cubrieran ____ empleos, la mayoría correspondientes al sector de la hostelería, la limpieza o el textil.

El ____% de las ofertas de empleo no encontraron la candidata 'perfecta' por falta de experiencia

Por este motivo, la Junta inició cursos específicos, en colaboración con UGT y el Ecyl, por los que pasaron 25 mujeres acogidas al Plan Dike; mujeres que en su mayoría tienen entre 38 y 39 años y con dos hijos,

Ideas importantes

¿Qué debemos de promover en actividades como las mostradas?[17]

Para poder leer e interpretar tablas y gráficos es necesario, aunque no suficiente, conocer estos elementos estructurales y los convenios relacionados con los mismos. Diversos autores han analizado las habilidades implícitas en la lectura y comprensión de tablas y gráficos estadísticos, siendo la clasificación más conocida la de Curcio (1989), quien definió los siguientes niveles, que también pueden considerarse para la lectura de tablas:

a. "Leer entre los datos" (lectura literal del gráfico o tabla sin interpretar la información contenida en el mismo). Por ejemplo, en la figura 1, ser capaz de ver cuántos países tienen una tasa de natalidad igual a 20 niños por 1000 habitantes o leer la esperanza de vida que corresponde a cada uno. En la tabla 1 identificar el número de niños con bajo peso en las madres fumadoras.

b. "Leer dentro de los datos" (interpretación e integración de los datos de la tabla o gráfico). Esta capacidad requiere la comparación de datos o la realización de operaciones con los datos. Un ejemplo en la figura 1 sería apreciar si la esperanza de vida es mayor en los países con tasa de natalidad 20 o 30 niños por 1000 habitantes o bien calcular el valor medio de la esperanza de vida en países con tasa de natalidad igual a 20 niños por 1000 habitantes. En la tabla 1, un ejemplo sería que la proporción de niños bajo de peso es mayor en mujeres fumadoras que no fumadoras.

c. "Leer más allá de los datos" (realizar predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico o tabla). Por ejemplo, ser capaz de observar que a mayor esperanza de vida en la figura 1 hay menor tasa de natalidad. En la tabla 1 deducir que hay una asociación entre las variables representadas.

Friel, Curcio y Bright (2001) amplían la clasificación anterior, definiendo un nuevo nivel "leer detrás de los datos" consistente en valorar críticamente el método de recogida de datos, su validez y fiabilidad, así como las posibilidades de extensión de las conclusiones. En la figura 1, alcanzar este nivel implicaría reconocer que si la política de un país hace aumentar la tasa de natalidad, ello no implicaría una reducción de la esperanza de vida en el mismo. En la tabla 1, preguntarse si la muestra de mujeres fue aleatoria o había alguna variable que pudiera causar la asociación. Cuando se considera no solo la interpretación de los gráficos, sino también su valoración crítica, los niveles superiores se modifican ligeramente y la categoría "leer detrás de los datos", puede subdividirse, en función de la capacidad crítica, respecto a la información reflejada en el gráfico (Aoyama, 2007):

a. Nivel racional/literal: los estudiantes leen correctamente el gráfico o tabla, incluyendo la interpolación, detección de tendencias y predicción, pero no cuestionan la información, ni dan explicaciones alternativas. Serían los estudiantes que en los ejemplos dados observan la relación entre las variables, pero no tratan de explicarla.
b. Nivel crítico: los estudiantes leen los gráficos, comprenden el contexto y evalúan la fiabilidad de la información, cuestionándola a veces, pero no son capaces de buscar hipótesis que expliquen la discordancia entre un dato y una interpretación del mismo. En los ejemplos dados, los estudiantes podrían plantearse la posibilidad de que hubiese otras variables que afectasen a la asociación observada, pero no serían capaces de poner ejemplos de los mismos.
c. Nivel hipotético: los estudiantes leen los gráficos los interpretan y evalúan la información, formando sus propias hipótesis y modelos. Al leer la tabla o el gráfico 1os estudiantes querrían obtener más información sobre los países con alta natalidad y baja esperanza de vida o sobre la relación entre tabaco y peso del recién nacido en Internet u otros medios para decidir con esta información cuál es la variable que explica la asociación observada.

[17] Adaptado de Arteaga, Pedro, Carmen Batanero, Gustavo Cañadas y J. Miguel Contreras (2010). "Las Tablas y Gráficos Estadísticos como Objetos Culturales". *Números*. s/l, volumen 76, pp. 55–67. Consulta: 21 de febrero de 2016.<http://funes.uniandes.edu.co/3571/1/Arteaga2011LasNumeros76.pdf>

2.4 Orientaciones para la enseñanza y aprendizaje relacionados con la estadística

A continuación, resuelva los siguientes problemas. Reconozca, en ellas, la competencia y las capacidades, y proponga los indicadores para el grado. Asimismo, plantee el uso de una orientación didáctica y reconozca los aspectos didácticos.

Los problemas mostrados fueron propuestos por la Dirección de Educación Secundaria (2015) en la plataforma Jornada Escolar Completa.

Problema N.° 1

ESTATURA

En una clase hay 25 chicas. La estatura media de las chicas es 130 cm.

Pregunta 1 *M421Q01 - 0 1 9*

Explica cómo se calcula la estatura media.

Pregunta 2 *M421Q02*

Rodea con un círculo *Verdadera* o *Falsa* para cada una de las siguientes afirmaciones.

Afirmación	Verdadera o Falsa
Si una de las chicas de la clase mide 132 cm, tiene que haber una chica de 128 cm de estatura.	Verdadera / Falsa
La estatura de la mayoría de las chicas es de 130 cm.	Verdadera / Falsa
Si se ordenan las chicas de la más baja a la más alta, entonces la estatura de la que ocupa la posición central tiene que ser igual a 130 cm.	Verdadera / Falsa
La mitad de las chicas de la clase deben medir menos de 130 cm, y la otra mitad deben medir más de 130 cm.	Verdadera / Falsa

Pregunta 3 *M421Q03*

Se encontró un error en la estatura de una estudiante. Era de 120 cm en lugar de 145 cm. ¿Cuál es la estatura media correcta de las chicas de la clase?

A 126 cm
B 127 cm
C 128 cm
D 129 cm
E 144 cm

Problema N.° 2

EXAMEN DE CIENCIAS

En el colegio de Irene, su profesora de ciencias les hace exámenes que se puntúan de 0 a 100. Irene tiene una media de 60 puntos de sus primeros cuatro exámenes de ciencias. En el quinto examen sacó 80 puntos.

Pregunta 1 *1 0 9*

¿Cuál es la media de las notas de Irene en ciencias después de los cinco exámenes?

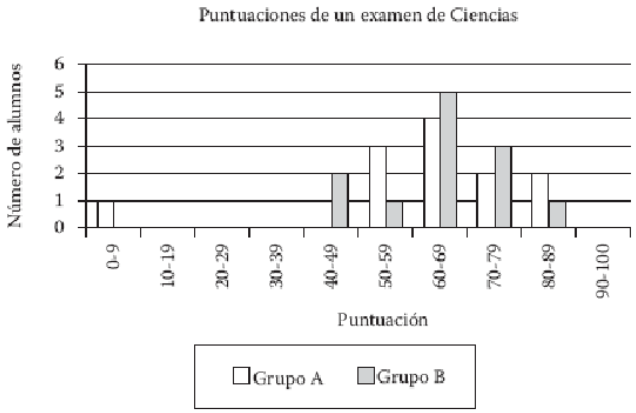
Media:.....

Problema N.° 3

PUNTUACIONES EN UN EXAMEN

El diagrama siguiente muestra los resultados en un examen de Ciencias para dos grupos, denominados Grupo A y Grupo B.

La puntuación media del Grupo A es 62,0 y la media del Grupo B es 64,5. Los alumnos aprueban este examen cuando su puntuación es 50 o más.



Al observar el diagrama, el profesor afirma que, en este examen, el Grupo B fue mejor que el Grupo A.

Pregunta 1 *1 0 9*

Los alumnos del Grupo A no están de acuerdo con su profesor. Intentan convencer al profesor de que el Grupo B no tiene por qué haber sido necesariamente el mejor en este examen. Da un argumento matemático, utilizando la información del diagrama, que puedan utilizar los alumnos del Grupo A.

Problema N.° 4

La proyección de la temperatura y la precipitación pluvial en Puno para enero de 2014 fue la siguiente:

Tabla 1

ESTACIÓN	TEMPERATURA		PRECIP EN mm	ESTACIÓN	TEMPERATURAS		PRECIP EN mm
	MAX (°C)	MIN (°C)			MAX (°C)	MIN (°C)	
CP. CHUQUIBAMBILLA	15.8	2.4	148.3	CO. LAMPA	16.0	4.0	155.3
CP. PUNO	15.2	5.5	162.0	CO. LARAQUERI	15.5	2.4	172.5
CO. ANANEA	9.6	-0.6	122.0	CO. LIMBANI	15.4	5.4	221.7
CO. ARAPA	15.6	4.9	142.2	CO. LLALLY	15.2	3.0	173.8
CO. AYAVIRI	15.7	3.4	144.3	CO. LOS UROS	15.6	6.2	158.1
CO. AZÁNGARO	15.8	4.8	115.9	CO. MACUSANI	12.3	1.2	134.1
CO. CABANILLAS	16.2	4.5	145.3	CO. MAÑAZO	16.0	4.3	141.4
CO. CAPACHICA	13.7	4.8	167.7	CO. MAZO CRUZ	15.5	0.5	138.3
CO. CAPAZO	14.0	-1.0	151.6	CO. MUÑANI	15.2	3.8	133.4
CO. COJATA	12.1	1.1	146.9	CO. OLLACHEA	17.6	8.6	250.2
CO. CRUCERO	14.4	2.6	150.0	CO. PAMPA HUTA	13.1	-0.2	176.7
CO. CUYO CUYO	13.4	5.8	140.4	CO. PIZACOMA	16.2	2.9	162.8
CO. DESAGUADERO	15.1	4.9	174.0	CO. PROGRESO	15.1	4.4	131.8
CO. HUANCANE	14.6	4.1	141.0	CO. PUCARA	16.3	4.1	155.5
CO. HUARAYA MOHO	14.3	5.2	202.4	CO. PUTINA	15.9	4.0	148.7
CO. ICHUÑA	19.6	5.8	140.7	CO. R.DE LA CRUZ ACORA	14.5	4.2	176.9
CO. ILAVE	14.8	4.5	171.0	CO. SAN GABAN	29.3	15.9	913.8
CO. ISLA SOTO	14.8	6.0	218.2	CO. SANTA ROSA	15.4	5.6	191.0
CO. ISLA SUANA	14.7	7.1	201.1	CO. TAMBOPATA	26.2	16.7	240.7
CO. ISLA TAQUILE	15.0	6.2	262.1	CO. TARACO	15.4	5.1	133.0
CO. JULI	13.9	4.9	199.2	CO. YUNGUYO	14.6	3.9	177.4
CO. JULIACA	17.1	4.3	132.4				

Para construir la tabla de frecuencia es necesario que agrupes los datos en clases con un determinado rango o amplitud.

a. Ordena de menor a mayor los datos de las temperaturas máximas que registran las diferentes estaciones.
b. Determina el rango o recorrido de los datos, tomando como referencia la siguiente igualdad: rango = valor mayor - valor menor.
c. Determina el número de intervalos k empleando: $k = \sqrt{n}$, donde *n* es el número de elementos de la muestra (el valor de la unidad aumenta en uno si el décimo es igual o mayor a 5).
d. Determina la amplitud de un intervalo de clase (C). Completa los datos en la siguiente igualdad $C = \frac{R}{k}$; donde C es amplitud, R es rango y K es número de intervalos.
e. Elabora la tabla en relación a la frecuencia absoluta y marca de clase:

Intervalos o clases	m_i	f_i

Donde:

m_i: marca de clase, $m_i = \frac{(\text{límite inferior}+\text{límite superior})}{2}$.

f_i: frecuencia absoluta (determina el número de veces que se repite un dato).

f. Elabora un histograma y un polígono de frecuencias haciendo uso de una tabla en Excel.

Sesión 3

Contenido

- Lectura: “Carácter multifacético de la probabilidad”
- Análisis: recursos para resolver problemas d probabilidad
- Estrategias de aprendizaje y enseñanza relacionadas con la probabilidad (Utilizando sesiones de la JEC e ítems de la evaluación PISA)

Competencias que desarrollará el docente

- Enuncia ideas y comprende el concepto de probabilidad.
- Analiza las representaciones gráficas elaboradas y las dificultades de aprendizaje reconocidas en ellas.
- Formula procesos para solucionar un problema y los desarrolla en equipos de trabajo. Para ello, propone orientaciones didácticas específicas.

3.1 Carácter multifacético de la probabilidad

Lectura[18]

Dado el carácter multifacético de la probabilidad es muy difícil que los estudiantes puedan comprender las nociones probabilísticas desde un enfoque axiomático puro. Discutiremos los cuatro enfoques de la naturaleza de la probabilidad relevantes para las matemáticas escolares: clásico, frecuencialista, subjetivista y estructural.

Enfoque clásico: de acuerdo a Laplace la probabilidad de un suceso se obtiene mediante la proporción de resultados favorables a este suceso en el espacio muestral; este enfoque asume la equiprobabilidad de todos los resultados simples del espacio muestral. Los matemáticos llaman a esta asignación de probabilidades una distribución de probabilidad uniforme. Es un enfoque *a priori* de la probabilidad que permite el cálculo de probabilidades antes de realizar pruebas aleatorias. La probabilidad geométrica está muy relacionada con este enfoque y reduce la probabilidad a cálculo de áreas.

En el momento de la aplicación de este enfoque a un experimento aleatorio real, nos enfrentamos con el problema de decidir cuáles son los resultados simples que son igualmente probables. La existencia de simetría en el experimento físico, que permite aplicar el principio de razón insuficiente de Laplace, es una guía poco firme para ayudar en este problema, entre otras cosas, porque el mismo experimento físico puede revelar diferentes simetrías lo que supone el problema de decidir entre ellas.

Enfoque frecuencialista: la probabilidad de un suceso se obtiene o, más bien, se estima a partir de la frecuencia relativa observada de ese suceso en ensayos repetidos. Es un enfoque *a posteriori*, experimental, basado en información obtenida después de realizar ensayos reales. La probabilidad es el límite hacia el que tiende la frecuencia relativa, de este modo, el enfoque frecuencialista implica la teoría de límites y la convergencia. Al aplicar esta definición, hay dificultades obvias para definir lo que significa 'similar' o 'aleatoriedad' ya que aparece la circularidad. Incluso la noción de estabilización de las frecuencias relativas a largo plazo presenta dificultades en relación al número de ensayos necesarios para lograr dicha estabilidad.

Enfoque subjetivista: representa el tipo de probabilidad que en el Renacimiento se calificaba como opinión o grado de creencia. En este enfoque, las probabilidades son evaluaciones de situaciones que son inherentes a la mente del sujeto no a las características del mundo real que nos rodea tal como se asume implícitamente en los dos primeros enfoques. "Las probabilidades son grados personales de creencia acerca de sucesos con incertidumbre" afirman von Winterfeldt y Edwards (1986: 91).

El enfoque subjetivista o personalista permite una discusión significativa sobre la probabilidad tanto de un suceso único como de un suceso repetible; la probabilidad de que salga cara en el siguiente lanzamiento de una moneda, la probabilidad de que el siguiente bebé nacido en determinada familia sea niño, todas esas probabilidades son la misma clase de cantidad aunque varían ampliamente en el grado en que se pueden definir frecuencias relativas relevantes. Desde este enfoque, todas las incertidumbres se pueden medir apropiadamente utilizando probabilidades. Sin embargo, no todas las opiniones numéricas acerca de resultados inciertos son probabilidades; las opiniones, para ser tratadas como probabilidades deben ser consistentes. Por ejemplo, sería tonto hacer una apuesta de 3 a 2 en cada uno de los dos caballos que participan en una carrera porque se pierde dinero en cuanto que la ganancia de 2 en un caballo no compensa la pérdida de 3 en el otro. La coherencia formaliza esta idea básica de la que se puede deducir las leyes básicas de la probabilidad.

El enfoque subjetivo de la probabilidad no supone relativismo cultural o científico en el sentido de que no implica que "tu conjetura es tan buena como la mía". Aunque tu opinión inicial sobre la futura conducta de una moneda o sobre cualquier otra hipótesis incierta, puede diferir radicalmente de la de tus vecinos (de ahí viene el nombre de **probabilidades personales**), tu opinión y la suya se verán tan transformadas por una serie de observaciones relevantes que llegarán a ser casi indistinguibles. Esta aproximación que surge de opiniones inicialmente divergentes es una razón para considerar "objetivas" las inferencias desde las frecuencias relativas.

[18] Tomado de Sáenz de Castro, César (1992). “La enseñanza de la probabilidad. un problema pendiente”. En Autor. *Probabilidad*. Madrid: Ediciones de la U.A.M. consulta: 21 de febrero del 2016. <https://www.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/cesar/Capitulo%205.doc >

Todas las probabilidades son condicionadas para el enfoque personalista. Formalmente, se puede establecer una partición en cualquier conjunto de sucesos y una probabilidad es una medida asignada a cada uno de los subconjuntos de la partición. Algunas veces la proposición a la que se asigna una probabilidad define completamente el conjunto de partida; por ejemplo: "esta bolsa contiene 50 bolas rojas y 50 azules, completamente mezcladas. Uno de nosotros selecciona una, metiendo la mano en la bolsa a ciegas y cogiendo la primera que encuentra. Será roja". Sin embargo, con mayor frecuencia, la proposición omite la mayor parte de la información que especifica el conjunto de partida; por ejemplo: "la siguiente persona que veré medirá al menos 1,70 cm". La posibilidad de que el enunciado sea verdad depende de cuestiones tales como dónde estoy en este momento y cuál es la secuencia probable de sucesos que me llevará a ver a alguna persona: puedo estar en casa con mi mujer e hijos, ninguno de los cuales llega a 1,70, puedo estar en un partido de baloncesto Real Madrid-Barcelona, en el primer caso la probabilidad de que se cumpla el enunciado será muy baja, en el segundo caso aumenta esta probabilidad. La información condicionante siempre existe, independientemente de que sea explícita o implícita. Puesto que las probabilidades modelan creencias u opiniones, el tipo más importante de condicionamiento tiene que ver con la información disponible en el momento en que se evalúa la probabilidad. La regla fundamental para cambiar las probabilidades cuando se dispone de nueva información es el teorema de Bayes. Este teorema es una formalización matemática del proceso de aprendizaje desde la experiencia. El enfoque personalista de la probabilidad se llama con frecuencia **Bayesiano**.

El enfoque subjetivista trata las frecuencias relativas del siguiente modo: una observación es un ítem de información que cambia una probabilidad. Además, la naturaleza de ese cambio coincide aproximadamente con la preconizada por el enfoque frecuencialista. Consideremos, por ejemplo, el intento de estimar la probabilidad de que una chincheta, lanzada al aire, caiga de cabeza. Si un frecuencialista ha observado que en N lanzamientos r veces la chincheta ha caído de cabeza y N es un número razonablemente grande, estará dispuesto a admitir que r/N es una buena estimación de la probabilidad pedida. Unos personalistas, como von Winterfeldt y Edwards, preferirán como estimación $(r+1)/(N+2)$, la cual, para N de razonable tamaño y r no demasiado próximo a 0 ni a N, es casi indistinguible de r/N. La razón para la preferencia, explicada de modo intuitivo, se basa en el hecho de que ya conocemos algo acerca de la chincheta antes del primer lanzamiento: puede caer de cabeza o de punta. Para N pequeño, r puede ser 0, en cuyo caso el estimador $0/N=0$ no parece muy adecuado mientras el estimador $1/(N+2)$ al menos admite que la chincheta puede caer de cabeza.

El enfoque subjetivista de la probabilidad no ha formado parte de la enseñanza tradicional de la teoría de probabilidades. La mayoría de los libros de texto enseñan las probabilidades que tienen que ver con experiencias aleatorias repetibles y que describen sucesos más que opiniones acerca de proposiciones o enunciados.

Enfoque estructural: la probabilidad formal es un concepto que se define por un sistema de axiomas y el conjunto de definiciones y teoremas que se pueden deducir de esos axiomas. Unas probabilidades se deducen de otras probabilidades de acuerdo a teoremas matemáticos, sin justificación para sus valores numéricos en ninguna aplicación. Para Kolmogorov (1976), la teoría de la probabilidad, como disciplina matemática que es, puede y debe ser desarrollada desde los axiomas, exactamente igual que la geometría y el álgebra. Según Barnett (1973), este enfoque estructural no clarifica la naturaleza de la probabilidad aunque los teoremas deducidos son un indicador de posibles interpretaciones. Sin embargo, puede servir como una estructura teórica para las dos principales concepciones de la probabilidad, la objetivista y la subjetivista. La posición objetivista abarca los enfoques clásico y frecuencialista; según esta perspectiva, la probabilidad es un tipo de disposición de ciertos sistemas físicos que se relaciona con frecuencias empíricas. Algunos teoremas como las leyes de los grandes números, confirman esta relación. La posición subjetivista trata la probabilidad como un grado de confianza en proposiciones que expresan incertidumbre. Los axiomas que se basan en una conducta de apuestas "racional", como los de coherencia y consistencia, proporcionan reglas para asignar probabilidades.

Actividad: Haciendo uso de textos educativos, reconoce la característica de los problemas mostrados en dichos textos, y elabora un cuadro descriptivo considerando la lectura realizada.

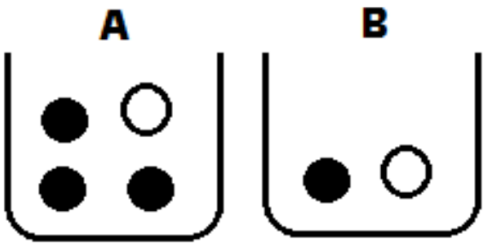
3.2 Recursos para resolver problemas de probabilidad

Problema N.° 1

¿Cuáles serían los posibles resultados de fin de partida del problema del Caballero de Meré?

Problema N.° 2

En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, ¿cuál de las dos cajas elegirías para hacer la extracción? ¿Por qué?



Problema N.° 3

Carlos pasa dos semáforos para ir al colegio cada mañana. El primero está verde 30 de cada 50 segundos y el segundo 30 de cada 90. ¿Qué probabilidad hay de que se pare en los dos semáforos? ¿Qué probabilidad hay de que se pare al menos en uno? ¿Qué probabilidad hay de que coja los dos en verde?

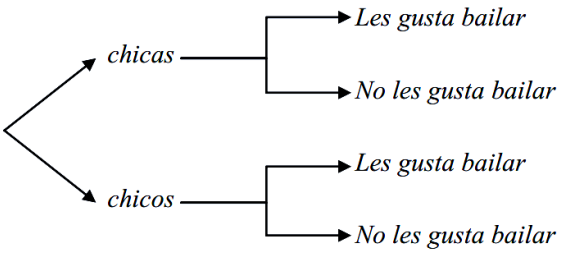
Problema N.° 4

Se ha realizado un estudio sobre las enfermedades de pulmón. Los datos se recogen en la siguiente tabla:

	Fumador	No fumador	Total
Padecer cáncer al pulmón	20	25	45
No padecer cáncer al pulmón	135	320	455
Total	155	345	500

Problema N.° 5

En mi clase hay el mismo número de chicas que de chicos. A las dos terceras partes de las chicas les gusta bailar y a una cuarta parte de los chicos también. ¿Sabrías poner las probabilidades correspondientes en el las ramas del siguiente diagrama (se llama diagrama de árbol)?



Problema N.° 6

En una clase con 30 estudiantes hay 13 que tienen Religión y el resto no, 5 que tienen Francés y el resto Inglés y 10 que tienen Taller de Matemáticas y el resto otro curso optativo. Si elegimos un estudiante al azar:

a) Calcula la probabilidad de que no tenga Religión.

b) Calcula la probabilidad de que tenga Taller de Matemáticas.

c) Si sabemos que 11 estudiantes tienen Inglés y Religión, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante tenga Inglés o Religión?

Problema N.° 7

La probabilidad de que un hombre padezca cierta enfermedad es 1/4 y la de que la mujer lo padezca 1/3. ¿Los sucesos son dependientes o independientes?

a) Calcula la probabilidad de que ambos padezcan dicha enfermedad.

b) Calcula la probabilidad de que el hombre la padezca y la mujer no.

c) Calcula la probabilidad de que no la padezca ninguno.

Problema N.° 8

A una comida asisten 28 hombres y 32 mujeres. Han elegido carne 16 hombres y 20 mujeres, el resto de asistente ha tomado pescado. Con estos datos crea la tabla de contingencia, complétala y escribe los sucesos que representa cada dato. Si elegimos a una persona al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Probabilidad de que haya tomado pescado.

b) Probabilidad de que sea mujer y haya tomado pescado.

c) Si esa persona ha tomado carne, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

d) Si selecciono a un hombre, ¿cuál es la probabilidad de que haya tomado pescado?

Problema N.° 9

En una fábrica de enlatados se producen 5000 envases diarios con tres máquinas distintas. La máquina A produce 1000 envases, la máquina B 2500 y la máquina C 1500. Estas máquinas tienen unas probabilidades de producir envases defectuosos del 2, 3 y 1 % respectivamente. Crea el diagrama de árbol correspondiente y calcula:

a) La probabilidad de que, elegido un envase al azar, sea defectuoso.

b) Si el envase seleccionado es defectuoso, ¿qué probabilidad hay de que venga de la máquina A?

c) Con esos 5000 envases y las probabilidades conocidas crea la tabla de contingencia asociada.

Problema N.° 10

Una empresa de construcción de cohetes propulsores de astronautas desea que las condiciones de seguridad en los lanzamientos sean muy altas, debido al elevado coste de los proyectos y al tiempo que se tarda en poner todo a punto de nuevo. En uno de esos cohetes hay instalados tres dispositivos de seguridad, Alfa, Beta y Gamma, para evitar un fallo en el encendido. Beta se pone automáticamente en funcionamiento si falla Alfa, y lo mismo ocurre con Gamma si falla Beta. La probabilidad de que funcione Alfa es 0,9, la de que funcione Beta es 0,95 y la de que funcione Gamma es 0,98.

Ideas importantes

¿Qué recursos identificamos en la resolución de los problemas de probabilidad?

En la tabla mostrada aparecen las tecnologías que servirán para razonar las técnicas usadas en los distintos campos de los problemas.

Campo de problemas	Recursos	
Exploración del espacio muestral	Visualización de distintos resultados posibles.	Definición del espacio muestral y los sucesos y sus operaciones.
Probabilidad de sucesos simples	Mediante recuento y comprensión.	Propiedades de la probabilidad y la regla de Laplace. Ley de los grandes números.
Probabilidad de eventos compuestos	Unión, intersección, compatibilidad e incompatibilidad, dependencia e independencia.	Probabilidad de la unión e intersección.
Probabilidad condicionada	Recuento, regla de Laplace y tabla de contingencia.	Probabilidad condicionada.
Probabilidad total	Diagrama de árbol y visualización de las opciones posibles.	Teorema de la probabilidad total.

3.3 Orientaciones para la enseñanza y aprendizaje relacionados con la probabilidad

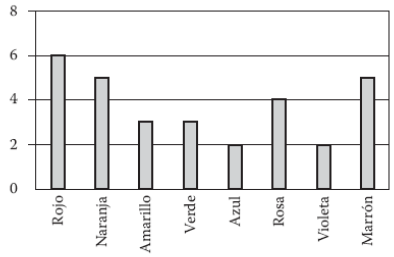
A continuación, resuelva los siguientes problemas. Reconozca, en ellas, la competencia y las capacidades, y proponga los indicadores para el grado. Asimismo, plantee el uso de una orientación didáctica y reconozca los aspectos didácticos.

Los problemas mostrados fueron propuestos por la Dirección de Educación Secundaria (2015) en la plataforma Jornada Escolar Completa.

Problema N.° 1

CARAMELOS DE COLORES

La madre de Roberto le deja coger un caramelo de una bolsa. Él no puede ver los caramelos. El número de caramelos de cada color que hay en la bolsa se muestra en el siguiente gráfico.



Pregunta 1 1 0 9

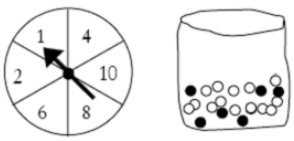
¿Cuál es la probabilidad de que Roberto extraiga un caramelo rojo?

A 10%
B 20%
C 25%
D 50%

Problema N.° 2

FERIA

En un juego de una caseta de feria se utiliza en primer lugar una ruleta. Si la ruleta se para en un número par, entonces el jugador puede sacar una canica de una bolsa. La ruleta y las canicas de la bolsa se representan en los dibujos siguientes.



Pregunta 1 1 0 9

Cuando se saca una canica negra se gana un premio. Daniela juega una vez.

¿Cómo es de probable que Daniela gane un premio?

A Es imposible.
B No es muy probable.
C Tiene aproximadamente el 50% de probabilidad.
D Es muy probable.
E Es seguro.

Problema N.° 3

¿QUÉ COCHE?

Cris acaba de sacarse el carné de conducir y quiere comprar su primer coche.

La siguiente tabla muestra las características de cuatro coches que vio en un concesionario de la zona.

País	Número de hogares **que tienen TV**	Porcentaje de hogares **con TV** con respecto a **todos los hogares**	Porcentaje de hogares **abonados a la televisión por cable** con respecto a los hogares **que tienen TV**
Japón	48,0 millones	99,8%	51,4%
Francia	24,5 millones	97,0%	15,4%
Bégica	4,4 millones	99,0%	91,7%
Suiza	2,8 millones	85,8%	98,0%
Noruega	2,0 millones	97,2%	42,7%

Fuente: UIT, Indicadores de las Telecomunicaciones en el Mundo, 2004/2005
UIT, Informe sobre el Desarrollo de las Telecomunicaciones/TIC en el Mundo, 2006

Pregunta 1 *PM978Q01*

La tabla muestra que en Suiza el 85,8% de todos los hogares tienen televisión.

Según la información de la tabla, ¿cuál es el cálculo más aproximado del número total de hogares en Suiza?

A 2,4 millones
B 2,9 millones
C 3,3 millones
D 3,8 millones

Problema N.° 4

TERREMOTO

Se emitió un documental sobre terremotos y la frecuencia con que éstos ocurren. El documental incluía un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos.

Un geólogo afirmó: En los próximos veinte años, hay dos posibilidades por cada 3 de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed.

Pregunta 1 *1 0 9*

¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?

A $\frac{2}{3} \times 20 = 13{,}3$, así que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la Ciudad de Zed.

B $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.

C La probabilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.

D No se puede decir lo qué sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

Problema N.° 5

La agricultura hoy en día es la fuente principal de ingresos de 2,3 millones de familias (que representan el 34 % de los hogares peruanos) y genera aproximadamente el 7,6 % del producto bruto interno (PBI). Los agricultores ven la necesidad de conformar grupos o centros de acopio para mejorar la comercialización de sus productos. Un claro ejemplo es la comunidad agropecuaria de San Marcos, ubicada en el departamento de Cajamarca, quienes han tenido el apoyo de personal técnico, ingenieros agrónomos y agricultores para mejorar la producción de sus cultivos de papa. La tabla muestra la cantidad de personal que se necesitó para mejorar el cultivo de papa de dicha asociación:

Género	Personal requerido			Total
	Técnicos (T)	Ingenieros (I)	Agricultores (A)	
Varones (H)	120	150	30	300
Mujeres (M)	50	140	10	200
Total	170	290	40	500

De acuerdo a la información de la cantidad del personal, construye una tabla de probabilidades y brinda la información referente a los equipos de trabajo y respecto a sus integrantes de acuerdo a su género.

a. Dado que la $P(H) = P(H \cap T) + P(H \cap I) + P(H \cap A)$, indica si cumple las siguientes probabilidades y explica por qué:

Probabilidad de P(H) es	Verifica en el siguiente modelo	Cumple		Explica por qué
	$P(H) = P(H \cap T) + P(H \cap I) + P(H \cap A)$	Sí	No	
0,4				
0,1+0,28+0,02				
0,34+0,08				
0,24+0,3+0,06				

b. Dado que la $P(M) = P(M \cap T) + P(M \cap I) + P(M \cap A)$, indica si cumple las siguientes probabilidades y explica por qué:

Probabilidad de P(M) es	Verifica en el siguiente modelo	Cumple		Explica por qué
	$P(M) = P(M \cap T) + P(M \cap I) + P(M \cap A)$	Sí	No	
0,34				
0,34+0,58+0,08				
0,1+0,28+0,02				
0,24+0,3+0,06				
0,4				

Problema N.° 6

Debido al aumento de los costos de los seguros en un determinado país, 8 millones de personas no cuentan con un seguro médico. En la tabla siguiente, se muestran datos muestrales representativos de la cantidad de personas que cuentan con seguro médico.

		Seguro médico		Total
		Sí	No	
Edad	18 a 34 años	750	170	920
	35 o mayor	950	130	1080
	Total			2000

		Seguro médico		Total
		Sí	No	
Edad	18 a 34 años			
	35 o mayor			
	Total			

Con estos datos, elabora una tabla de probabilidad conjunta y úsala para responder las preguntas restantes.

a. ¿Qué indican las probabilidades acerca de la edad de la población?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tomada en forma aleatoria no tenga seguro médico?

c. Si la persona tiene entre 18 y 34 años, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga seguro médico?

d. Si la persona tiene 34 años o más, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga seguro médico?

e. Si la persona no tiene seguro médico, ¿cuál es la probabilidad de que tenga entre 18 y 34 años?

f. ¿Qué indica esta información acerca del seguro médico?

Bibliografía

Arteaga, Pedro, Carmen Batanero, Juan Jesús Ortiz y José Miguel Contreras (2011). *Sentido numérico y gráficos estadísticos en la formación de profesores*. Granada: Universidad de Granada. Consulta: 21 de febrero de 2016.<http://www.ugr.es/~jmcontreras/pages/Investigacion/articulos/2012Publicaciones.pdf>

Arteaga, Pedro, Carmen Batanero, Gustavo Cañadas y J. Miguel Contreras (2010). "Las Tablas y Gráficos Estadísticos como Objetos Culturales". Números. s/l, volumen 76, pp. 55–67. Consulta: 21 de febrero de 2016.<http://funes.uniandes.edu.co/3571/1/Arteaga2011LasNumeros76.pdf>

Alayo Orbegozo, Fernando (2015). "Spotify: Peruanos prefieren el rock nacional de hace 20 años". El Comercio. Luces. Lima, 24 de julio de 2015. Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://elcomercio.pe/luces/musica/spotify-peruanos-prefieren-rock-nacional-hace-20-anos-noticia-1828019>

Pajares, Almudena (2009). *Didáctica de la Estadística y la Probabilidad en Secundaria: Experimentos motivadores.* Cuadernos de trabajo escuela universitaria de estadística. Madrid: Universidad Complutense Madrid.

Batanero, Carmen (2002). "Los retos de la cultura estadística". Ponencia presentada en Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires.

Contreras, Mauricio (s/f). Muestras y estimaciones. Inferencia estadística. Material de enseñanza.

Depor.com (2015). "Fútbol Peruano: ¿qué equipo tiene más hinchas en el Perú?". Depor. Fútbol peruano. Lima, 31 de julio de 2015. Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://depor.com/futbol-peruano/alianza-lima-universitario-deportes-sporting-cristal-hinchas-cpi-1049675>

Del Puerto, Silvia y Silvia Seminara (2007). "Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva". Revista Iberoamericana de Educación. s/l, número 43.

E‑encuestas (s/f). "Tipos de pregunta en la encuesta". Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://www.e-encuesta.com/blog/2015/tipos-de-pregunta-en-la-encuesta/>

Edipat (2014). *Análisis descriptivo*. Galicia: Autor.

Etayo Lodosa, Rosario (2011). "Unidad didáctica: 'Azar y probabilidad'". *Publicaciones Didácticas*. s/l., número 9.

FiloCosta (s/f). *¿Cómo elaborar encuestas?* Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://blocs.xtec.cat/filocostaillobera/files/2012/09/encuestas.pdf>

González Navarrete, Manuel (2008). *Propuestas didácticas para la enseñanza de las probabilidades en educación media.* Tesina presentada como parte de los requisitos para optar al título de Profesor de Estado en Matemática. Temuco: Universidad de La Frontera, Facultad de Educación y Humanidades.

García García, Ricardo (2013). *Aprendizaje de la estadística y la probabilidad en Secundaria.* Trabajo final de Máster de formación del profesorado de Secundaria. Cantabria: Universidad de Cantabria.

Ministerio de Educación del Perú (2007). *Matemática. Serie 2 para docentes de Secundaria. Didáctica de la Matemática. Fascículo 5: aspectos metodológicos en el aprendizaje de la probabilidad y de la estadística en Secundaria.* Lima: Minedu. Consulta: 23 de febrero de 2016. http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivosdes/fasc_mat/04_mat_d_s2_f5.pdf

Ministerio de Educación del Perú (2007). *Matemática. Serie 3 para docentes de Secundaria. Teoría de matemática básica. Fascículo 10: la estadística y sus aplicaciones.* Lima: Minedu. Consulta: 23 de febrero de 2016.

<http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivosdes/fasc_mat/04_mat_d_s3_f10.pdf>Mochón, Simón y María Margarita Tlachy Anell (2003) “Un estudio sobre el promedio: concepciones y dificultades en dos niveles educativos”. Educación Matemática, volumen 15, número 3, pp. 5-28.

Peru21 (2014). “OMS: Al día mueren 44 peruanos por consumo de tabaco”. Peru21. Lima, 1 de junio de 2014. Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://peru21.pe/actualidad/oms-al-dia-mueren-44-peruanos-consumo-tabaco-2185820>

Radio Nacional (2015). “MINCETUR: Turismo registra crecimiento en 7 % por feriados largos”. Radio Capital. Economía. Lima, 2 de mayo de 2015. Consulta: 23 de febrero de 2016. <http://www.radionacional.com.pe/informa/economia/mincetur-turismo-registra-crecimiento-en-7-por-feriados-largos>

Repetto, Farías, Vigna, Alessandrini, Benitez (2012). Ejercicios sobre Medidas de Posición, Tendencia Central y Dispersión. Material de enseñanza. s/l: Estadística RRII-Facultad Derecho.

Ruiz Molano, Angélica (2015). “Un estudio de caso sobre errores y dificultades observadas en la elaboración de algunas gráficas estadísticas”. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias.* Bogotá, volumen 10, número 1.

Sáenz de Castro, César (1992). “La enseñanza de la probabilidad. Un problema pendiente”. En Autor. Probabilidad. Madrid: Ediciones de la U.A.M. consulta: 21 de febrero del 2016. <https://www.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/cesar/Capitulo%205.doc>

Sonsoles Blázquez (s/f). *Estadística a través de la prensa. Material de enseñanza.* Valladolid: CFIE Valladolid.

Taléns, Isabel (s/f). *Unidad didáctica: probabilidad y estadística. Elaboración de una Unidad Didáctica desde la perspectiva intercultural*. Material de enseñanza. Benissa-Alicante: Autor.